

Construcción del concepto de **área** como magnitud

De la Teoría de Situaciones Didácticas
a las aulas de Educación Primaria

Veronica Milagros Castillo Perez

Construcción del concepto de área como magnitud

De la teoría de situaciones didácticas
a las aulas de educación primaria

Editor



Veronica Milagros Castillo Perez

vmcastillo@pucp.edu.pe

 <https://orcid.org/0000-0003-1861-111X>

Departamento Académico de Educación - Pontificia Universidad Católica del
Perú, Lima - Perú

PRÓLOGO

Medir una superficie parece, a primera vista, una tarea elemental. En la vida cotidiana se habla del área de una habitación, de un terreno, de una pared o de una pantalla con una naturalidad que puede ocultar la complejidad conceptual implicada. Para un estudiante de educación primaria, sin embargo, comprender el área no consiste simplemente en recordar que ciertas longitudes deben multiplicarse. Supone reconocer un atributo bidimensional, distinguirlo de la forma y del perímetro, concebir una unidad capaz de recubrir una región, comprender que distintas unidades producen números distintos y aceptar que una figura puede transformarse sin que por ello cambie la cantidad de superficie que ocupa. Esta red de relaciones convierte la enseñanza del área en un problema central de la educación matemática.

La relevancia del tema se intensifica cuando se observa que muchas dificultades sobreviven después de años de escolaridad. La investigación internacional ha mostrado que estudiantes de diversos niveles pueden calcular con fórmulas y, al mismo tiempo, no interpretar el cuadrado como unidad de área o confundir el borde con la superficie (Kamii & Kysh, 2006; Zacharos, 2006). Revisiones recientes mantienen esta preocupación y subrayan que el conocimiento conceptual en medición de área se relaciona con mejores posibilidades de resolución de problemas, especialmente cuando las experiencias de aprendizaje articulan unidades, estructuración espacial y razonamiento sobre transformaciones (Idrus et al., 2022).

El interés científico de esta obra reside precisamente en examinar el área como magnitud y no como una colección de fórmulas. Esa decisión modifica el objeto de enseñanza: desplaza la atención desde el resultado hacia los procesos que permiten comparar, recubrir, descomponer, recomponer y validar. La enseñanza gana así un carácter explicativo. El estudiante deja de ser un ejecutor de reglas y se convierte en un sujeto que debe tomar decisiones frente a un medio matemático, explicar las unidades que utiliza y justificar por qué una transformación conserva o modifica aquello que se mide.

La obra también tiene una dimensión profesional. Para el docente, enseñar área con sentido conceptual exige anticipar errores, seleccionar variables didácticas, decidir cuándo intervenir y construir puentes entre representaciones concretas, gráficas, verbales, digitales y simbólicas. Requiere entender que una cuadrícula puede ser una

herramienta poderosa, pero también una ayuda que oculta la estructura si nunca se retira; que un manipulativo puede abrir posibilidades de comparación, pero necesita ser traducido a relaciones matemáticas; y que GeoGebra puede ampliar la exploración de invariantes solo cuando su uso responde a una necesidad cognitiva y no a la mera incorporación de tecnología.

En el plano social, fortalecer el razonamiento matemático en la escolaridad básica forma parte de una agenda más amplia de calidad y equidad. Los resultados de PISA 2022 muestran que en Perú el 34% de los estudiantes de 15 años alcanzó al menos el nivel 2 en matemática, frente al 69% promedio de la OCDE, dato que no puede atribuirse a un único contenido, pero que recuerda la necesidad de construir aprendizajes matemáticos conectados con modelización, razonamiento y resolución de problemas (OECD, 2023). Las bases conceptuales de la medición geométrica contribuyen a esa formación porque integran número, espacio, proporcionalidad, estimación y argumentación.

Este libro propone, por ello, una lectura de largo alcance. Parte de una investigación didáctica situada y la pone en diálogo con teorías clásicas y evidencia científica contemporánea. Su propósito no es ofrecer una receta de aula, sino un marco para comprender por qué ciertas tareas hacen visible el pensamiento de los estudiantes, qué relaciones matemáticas deben construirse antes de formalizar algoritmos y cómo puede organizarse una progresión que preserve el significado a medida que aumenta la eficiencia del cálculo. La aspiración editorial es que el texto resulte útil tanto para docentes como para formadores, investigadores y estudiantes de posgrado interesados en la enseñanza y aprendizaje de la geometría y la medida.

PRESENTACIÓN

Esta obra tiene como antecedente académico la tesis «Secuencia didáctica para contribuir en la construcción del concepto de área como magnitud con estudiantes de educación primaria», elaborada por Verónica Milagros Castillo Pérez para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, en San Miguel, durante 2015 (Castillo Pérez, 2015). La investigación se encuentra disponible en el Repositorio Institucional de la Pontificia Universidad Católica del Perú mediante el identificador persistente <http://hdl.handle.net/20.500.12404/6751>. A partir de sus datos, procedimientos y resultados, el presente libro amplía el problema hacia una discusión científica autónoma sobre el área como magnitud, el razonamiento de medición y el diseño de situaciones didácticas.

La transformación realizada conserva como fuente primaria la arquitectura metodológica y la evidencia del estudio original: cuatro estudiantes de once años del sexto grado de educación primaria, el trabajo con el docente de Matemática, dos secuencias de actividades, materiales de recubrimiento, unidades arbitrarias, cuadrículas, registros escritos, observaciones y grabaciones. También conserva los errores, las respuestas parciales y las tensiones registradas. Ninguna cifra o resultado del caso ha sido reemplazado por una estimación retrospectiva. Cuando el libro utiliza datos de la tesis, su procedencia se reconoce expresamente; cuando formula modelos, tablas de síntesis o propuestas nuevas, se identifica como elaboración de esta obra.

El paso de tesis a libro exigió una transformación intelectual y no solo formal. La estructura universitaria basada en problema, objetivos, marco teórico, metodología y resultados fue sustituida por una lógica editorial de seis capítulos: contexto y persistencia del problema; fundamentos del área como magnitud; teorías y diseño de situaciones; recursos y mediaciones; reconstrucción del caso de estudio; y discusión, transferencia y proyección. Los objetivos e hipótesis de trabajo dejaron de funcionar como encabezados y fueron integrados en una narrativa que explica las relaciones entre conocimiento matemático, actividad del estudiante y decisiones docentes.

La ampliación bibliográfica incorpora literatura científica posterior a la tesis, con énfasis en revisiones sistemáticas, metaanálisis y estudios sobre medición de área, trayectorias de aprendizaje, visualización espacial, manipulativos, evaluación formativa

y GeoGebra. Se integran, entre otros, los aportes de Idrus et al. (2022), Atit et al. (2022), Hawes et al. (2022), Harris et al. (2023), Lehmann (2023), Yohannes y Chen (2023), Suparman et al. (2024) y Vargas Herrera et al. (2025), junto con documentos curriculares del Ministerio de Educación del Perú y el informe PISA 2022 de la OCDE. La actualización no reemplaza a autores clásicos; los reubica dentro de debates y evidencias contemporáneas.

El libro está dirigido a investigadores en educación matemática, docentes de educación primaria, especialistas curriculares, formadores de profesores y estudiantes de posgrado. Para el aula ofrece criterios de diseño, ejemplos de variables y matrices de evaluación; para la investigación ofrece una reconstrucción trazable del caso y una discusión sobre sus alcances; para la formación docente propone una lectura de los errores como evidencia del pensamiento y de la intervención docente como parte del sistema didáctico.

La organización de la obra permite dos recorridos complementarios. El lector puede avanzar de manera secuencial desde los fundamentos hacia el caso y su discusión, o puede consultar capítulos específicos según su interés. Las tablas y figuras sintetizan relaciones, no sustituyen la argumentación. El capítulo dedicado al caso mantiene una frontera explícita entre los datos originales y las nuevas interpretaciones. De este modo, la obra busca conservar fidelidad histórica a la investigación de origen y, a la vez, ofrecer una plataforma conceptual suficientemente amplia para ser leída con independencia de la tesis que le dio origen.

INTRODUCCIÓN

La medición de área ocupa una posición singular dentro de las matemáticas escolares. Conecta geometría, número, multiplicación, fracciones, proporcionalidad, estimación y resolución de problemas, y al mismo tiempo exige una abstracción que suele pasar inadvertida: el estudiante debe tratar una región bidimensional como portadora de una magnitud que puede conservarse bajo transformaciones y expresarse numéricamente respecto de una unidad. Esa coordinación no surge automáticamente de observar figuras ni de aplicar fórmulas. Necesita situaciones en las que comparar, recubrir, descomponer, reconstruir y argumentar sean actividades matemáticamente necesarias.

Durante décadas, la investigación ha documentado dificultades asociadas a una introducción prematura de fórmulas. La multiplicación longitud por anchura puede ser ejecutada sin que el cuadrado se constituya como unidad de medida, y estudiantes capaces de calcular rectángulos pueden fracasar cuando la figura se gira, se presenta sin cuadrícula o exige descomposición (Kamii & Kysh, 2006; Zacharos, 2006). Estudios sobre textos escolares también han encontrado desajustes entre la secuencia de contenidos y las trayectorias de aprendizaje recomendadas por la investigación, especialmente en el tratamiento temprano de la unidad y la estructuración espacial (Hong et al., 2018, 2019).

El concepto de área como magnitud ofrece una respuesta teórica a este problema. Desde los trabajos de Freudenthal, Douady, Perrin-Glorian y la tradición francófona de didáctica de las matemáticas, el área puede comprenderse como una propiedad de las superficies que permite establecer equivalencias y orden, diferenciada tanto de la forma geométrica como de la medida numérica. Esta distinción hace inteligible una situación fundamental: una superficie conserva su área cuando cambia la unidad con la que se mide, pero el número que expresa esa medida cambia. Comprender esta relación es un objetivo conceptual más profundo que recordar una fórmula.

La evidencia más reciente refuerza esta orientación. La revisión sistemática de Idrus et al. (2022) identifica una relación directa entre conocimiento conceptual y desempeño en medición de área. Clements et al. (2018) muestran que intervenciones centradas en unidades y estructuración espacial pueden apoyar el desarrollo de la medición de área desde edades tempranas. A su vez, metaanálisis sobre habilidades

espaciales encuentran relaciones consistentes con el rendimiento matemático y efectos de la formación espacial, lo que amplía la mirada sobre las operaciones cognitivas implicadas en recubrir, imaginar unidades y reorganizar figuras (Atit et al., 2022; Hawes et al., 2022).

En Perú, la cuestión se inserta en un currículo por competencias que plantea progresiones de aprendizaje y resolución de problemas de forma, movimiento y localización. El Programa Curricular de Educación Primaria y el Currículo Nacional establecen un marco que permite articular atributos medibles, estimación, unidades y argumentación a lo largo de la escolaridad (Ministerio de Educación del Perú, 2016a, 2016b). Esta oportunidad curricular exige, sin embargo, traducirse en secuencias de aula que no vuelvan a reducir el área a la memorización de procedimientos.

El enfoque de este libro se apoya en tres grandes ejes. El primero es matemático: qué significa área, cómo se diferencia de superficie y medida, qué propiedades la caracterizan y cómo se construye una unidad bidimensional. El segundo es cognitivo-didáctico: qué trayectorias y errores aparecen cuando los estudiantes intentan medir y qué situaciones pueden provocar reorganizaciones de estrategia. El tercero es metodológico-profesional: cómo diseñar, observar y validar secuencias de enseñanza, cómo intervenir sin sustituir la actividad matemática y cómo utilizar recursos físicos o digitales con un propósito conceptual.

Los seis capítulos desarrollan estos ejes de manera progresiva. El capítulo I sitúa el problema en la cultura matemática escolar, el currículo y la investigación reciente. El capítulo II profundiza en la estructura del área como magnitud y en las trayectorias que conducen desde el recubrimiento hasta la fórmula. El capítulo III examina la Teoría de Situaciones Didácticas y la Ingeniería Didáctica como marcos para diseñar y analizar experiencias. El capítulo IV estudia manipulativos, cuadrículas, visualización espacial, GeoGebra y evaluación formativa. El capítulo V reconstruye, con trazabilidad, el caso empírico de Castillo Pérez (2015). Finalmente, el capítulo VI contrasta los hallazgos con la evidencia contemporánea y propone una progresión y un modelo integrador para futuras prácticas e investigaciones.

El alcance de la obra es deliberadamente analítico. No pretende generalizar estadísticamente a partir de cuatro participantes ni presentar la secuencia original como intervención probada para cualquier contexto. Su aporte consiste en mostrar cómo un caso microdidáctico puede dialogar con evidencia acumulada y convertirse en fuente de

hipótesis de diseño. Las conclusiones se formulan, por tanto, en términos de posibilidades, relaciones y condiciones de aprendizaje, diferenciando siempre lo observado en 2015 de las ampliaciones construidas mediante la literatura científica posterior.

ÍNDICE

PRÓLOGO	3
PRESENTACIÓN	5
INTRODUCCIÓN.....	7
CAPÍTULO I.....	14
1.1 De la superficie cotidiana al objeto matemático área.....	14
1.2 La enseñanza escolar del área y el predominio de la fórmula.....	22
1.3 Currículo peruano, progresión y geometría de la medida	28
1.4 Dificultades persistentes: área, perímetro, forma y medida.....	35
1.5 Actualidad científica y agenda de investigación	42
CAPÍTULO II.....	50
2.1 Superficie, área, medida y número: distinciones fundamentales.....	50
2.2 Propiedades matemáticas de la magnitud área.....	57
2.3 La unidad de área: recubrimiento, iteración y estructura bidimensional	64
2.4 De la comparación a la fórmula: trayectorias del razonamiento de área	70
2.5 Figuras compuestas, descomposición y recomposición.....	77
CAPÍTULO III.....	85
3.1 Situaciones didácticas, medio y devolución	85
3.2 Acción, formulación, validación e institucionalización.....	92
3.3 Contrato didáctico, intervención docente y estatuto del error.....	100
3.4 Variables didácticas y control de la complejidad.....	107
3.5 Ingeniería Didáctica como metodología de diseño y análisis	114
CAPÍTULO IV	121
4.1 Manipulativos y material concreto: posibilidades y condiciones.....	121
4.2 Cuadrículas, mallas y estructuración espacial	128
4.3 Visualización espacial y pensamiento geométrico.....	135
4.4 GeoGebra y geometría dinámica con sentido conceptual	141
4.5 Evaluación formativa de estrategias y progresiones.....	149
CAPÍTULO V.....	157
5.1 Contexto, participantes y arquitectura metodológica del caso.....	157
5.2 Diseño de la secuencia, materiales y variables didácticas	164
5.3 Del perímetro y los ángulos al recubrimiento de superficies	172

5.4 Composición, descomposición, cambio de unidad y errores productivos	179
5.5 Transferencia una semana después y alcance de los resultados.....	188
CAPÍTULO VI	196
6.1 Interpretación ampliada de los hallazgos del caso.....	196
6.2 Hacia una progresión ampliada para enseñar área como magnitud	203
6.3 Conocimiento docente y orquestación de discusiones matemáticas	210
6.4 Tecnología, equidad y diversidad de representaciones	216
6.5 Limitaciones, agenda de investigación y modelo integrador	223
REFLEXIONES FINALES	233
BIBLIOGRAFÍA	237

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Distinciones iniciales entre superficie, área, medida y unidad.....	18
Tabla 2. Contraste entre enseñanza formularia y enseñanza conceptual del área	25
Tabla 3. Progresión curricular orientativa para el área en educación primaria	32
Tabla 4. Obstáculos conceptuales frecuentes en la medición de área	39
Tabla 5. Relaciones entre los cuadros geométrico, magnitud y numérico	53
Tabla 6. Propiedades estructurales de la magnitud área	60
Tabla 7. Niveles de estructuración de unidades de área	67
Tabla 8. Estrategias para figuras compuestas	80
Tabla 9. Componentes del medio didáctico para aprender área	89
Tabla 10. Fases de la Teoría de Situaciones Didácticas y evidencias esperables	97
Tabla 11. Intervenciones docentes y su efecto potencial.....	103
Tabla 12. Variables didácticas pertinentes para el concepto de área.....	110
Tabla 13. Criterios para seleccionar manipulativos en tareas de área	124
Tabla 14. Variaciones de cuadrícula para diagnosticar estructuración	131
Tabla 15. Procesos espaciales vinculados a la medición de área	138
Tabla 16. Usos de GeoGebra alineados con el concepto de área como magnitud	145
Tabla 17. Matriz de evaluación formativa del razonamiento de área.....	152
Tabla 18. Síntesis metodológica del estudio original	160
Tabla 19. Variables y valores de la primera actividad del estudio	168
Tabla 20. Organización temporal y función de las dos actividades	168
Tabla 21. Procedimientos iniciales observados y su interpretación	175
Tabla 22. Medidas esperadas para los polígonos A–L bajo distintas unidades.....	182
Tabla 23. Episodios de error con valor diagnóstico	182
Tabla 24. Balance de hallazgos del caso	191
Tabla 25. Contraste entre el caso y la literatura contemporánea	199
Tabla 26. Progresión ampliada propuesta para el aprendizaje del área.....	206
Tabla 27. Conocimientos profesionales para enseñar área con enfoque conceptual	213
Tabla 28. Ecología de representaciones para el concepto de área	220
Tabla 29. Agenda de investigación derivada de la obra	228
Tabla 30. Modelo integrador para el diseño de situaciones de área	228

LISTA DE GRÁFICOS Y FIGURAS

Figura 1. De la región geométrica a la medición.....	16
Figura 2. Trayectoria conceptual del área	72
Figura 3. Sistema didáctico y medio	87
Figura 4. Dinámica de las fases de una situación	95
Figura 5. Ecología de recursos para aprender área	143
Figura 6. Flujo del caso de estudio	166
Gráfico 1. Medidas esperadas de los polígonos A–L con la unidad del Grupo A	184
Gráfico 2. Polígonos A, C y D bajo cuatro sistemas de medida	184
Gráfico 3. Una misma área del polígono L expresada con unidades diferentes.....	185
Figura 7. Modelo integrador para diseñar aprendizaje de área.....	226

CAPÍTULO I

EL ÁREA EN LA CULTURA MATEMÁTICA ESCOLAR: CONTEXTO, CURRÍCULO Y PERSISTENCIA DE UN PROBLEMA CONCEPTUAL

El primer capítulo sitúa el área dentro de la cultura matemática escolar y examina por qué un contenido aparentemente elemental sigue generando dificultades persistentes. La discusión articula la evolución conceptual del área, el lugar del currículo, la influencia de los textos y la evidencia de errores que confunden perímetro, forma y medida. El objetivo es construir el escenario intelectual del libro: comprender que el problema no reside en la existencia de fórmulas, sino en el momento y las condiciones bajo las cuales esas fórmulas adquieren significado. Desde esta base, el capítulo propone leer la investigación de origen como un caso local de un problema internacional bien documentado.

1.1 DE LA SUPERFICIE COTIDIANA AL OBJETO MATEMÁTICO ÁREA

El núcleo de este apartado es la transición desde experiencias perceptivas de extensión y recubrimiento hacia un objeto matemático que puede compararse, conservarse y medirse. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Freudenthal (1983); Douady y Perrin-Glorian (1987); Idrus et al. (2022)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que

permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: la tesis distingue superficie, área y medida y adopta el área como magnitud, evitando reducirla a un valor numérico. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que la comprensión conceptual exige coordinar forma, recubrimiento, unidad bidimensional, iteración y conservación antes de automatizar fórmulas. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Freudenthal (1983); Douady y Perrin-Glorian (1987); Idrus et al. (2022)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

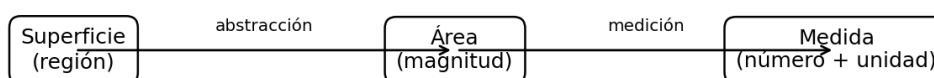
Un mecanismo particularmente relevante es que la equivalencia de áreas puede establecerse por transformaciones, descomposición y recomposición aun cuando cambie la forma. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de

ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, una secuencia didáctica fértil debe provocar que el estudiante explique qué atributo está comparando y qué permanece invariante. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Figura 1. De la región geométrica a la medición

De la región geométrica a la medición



Elaboración propia a partir de los marcos teóricos y relaciones desarrollados en este libro.

La figura sintetiza relaciones que en el texto se analizan de manera separada. Su lectura debe hacerse de forma funcional: las flechas representan dependencias o transiciones didácticas, no una secuencia psicológica rígida. El valor del esquema consiste en ayudar a identificar qué componentes deben coordinarse cuando se diseña o interpreta una situación de aprendizaje del área.

Conviene introducir una cautela: la cotidianeidad ofrece contextos de comparación, reparto y cobertura, pero la formalización requiere controlar el significado de la unidad. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Freudenthal (1983); Douady y Perrin-Glorian (1987); Idrus et al. (2022)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una

representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 1 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 1. Distinciones iniciales entre superficie, área, medida y unidad

Concepto	Pregunta guía	Riesgo de confusión	Tratamiento didáctico
Superficie	¿Qué región se considera?	Confundir región con número	Delimitar, recortar, superponer y transformar regiones
Área	¿Cuánta extensión bidimensional posee?	Identificarla con la forma	Comparar y conservar bajo transformaciones
Medida de área	¿Cuántas unidades corresponden?	Tomarla como propiedad absoluta	Explicitar unidad y relación de cobertura
Unidad de área	¿Con qué patrón bidimensional se compara?	Tratarla como unidad lineal	Iterar sin huecos ni superposiciones

Elaboración propia a partir de Freudenthal (1983), Douady y Perrin-Glorian (1987) e Idrus et al. (2022).

La lectura de la Tabla 1 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Freudenthal (1983); Douady y Perrin-Glorian (1987); Idrus et al. (2022)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Freudenthal (1983); Douady y Perrin-Glorian (1987); Idrus et al. (2022)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran

relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la transición desde experiencias perceptivas de extensión y recubrimiento hacia un objeto matemático que puede compararse, conservarse y medirse también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Freudenthal (1983); Douady y Perrin-Glorian (1987); Idrus et al. (2022)) proporciona

antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de una secuencia didáctica fértil debe provocar que el estudiante explique qué atributo está comparando y qué permanece invariante, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, la cotidianeidad ofrece contextos de comparación, reparto y cobertura, pero la formalización requiere controlar el significado de la unidad plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Freudenthal (1983); Douady y Perrin-Glorian (1987); Idrus et al. (2022)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

1.2 LA ENSEÑANZA ESCOLAR DEL ÁREA Y EL PREDOMINIO DE LA FÓRMULA

El núcleo de este apartado es la tensión entre una enseñanza centrada en procedimientos de cálculo y otra orientada a construir significado para la magnitud área. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Kamii y Kysh (2006); Zacharos (2006); Clements et al. (2018)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: en el estudio de origen las estudiantes recurrieron inicialmente a fórmulas, al perímetro o incluso a la medición de ángulos sin disponer de un criterio estable para el área. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que la literatura reporta que introducir tempranamente longitud por anchura puede producir respuestas correctas sin una comprensión de la unidad cuadrada. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan

recuperarse, explicarse y transferirse. (Kamii y Kysh (2006); Zacharos (2006); Clements et al. (2018)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que la fórmula debe emerger como una abreviación de la estructura rectangular de filas y columnas, no como una regla desconectada del recubrimiento. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, el error se convierte en evidencia del modelo conceptual del estudiante y permite diseñar tareas que hagan visible la diferencia entre borde y superficie. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: la enseñanza debe alternar tareas métricas y no métricas, unidades visibles e implícitas, y figuras regulares y compuestas. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El

análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Kamii y Kysh (2006); Zacharos (2006); Clements et al. (2018)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 2 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la

literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 2. Contraste entre enseñanza formularia y enseñanza conceptual del área

Dimensión	Predominio formularia	Orientación conceptual
Punto de partida	Nombre de la figura y fórmula	Atributo, comparación y recubrimiento
Unidad	Implícita después del cálculo	Objeto bidimensional que estructura la medida
Error	Fallo de aplicación	Evidencia sobre el modelo conceptual
Transferencia	Ejercicios del mismo tipo	Variación de figura, unidad y representación
Validación	Respuesta numérica	Argumento sobre cobertura, equivalencia o transformación

Elaboración propia a partir de Kamii y Kysh (2006), Zacharos (2006) y Clements et al. (2018).

La lectura de la Tabla 2 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Kamii y Kysh (2006); Zacharos (2006); Clements et al. (2018)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el

medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Kamii y Kysh (2006); Zacharos (2006); Clements et al. (2018)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué

enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la tensión entre una enseñanza centrada en procedimientos de cálculo y otra orientada a construir significado para la magnitud área también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Kamii y Kysh (2006); Zacharos (2006); Clements et al. (2018)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de el error se convierte en evidencia del modelo conceptual del estudiante y permite diseñar tareas que hagan visible la diferencia entre borde y superficie, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del

contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, la enseñanza debe alternar tareas métricas y no métricas, unidades visibles e implícitas, y figuras regulares y compuestas plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Kamii y Kysh (2006); Zacharos (2006); Clements et al. (2018)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

1.3 CURRÍCULO PERUANO, PROGRESIÓN Y GEOMETRÍA DE LA MEDIDA

El núcleo de este apartado es la ubicación del área dentro de una progresión curricular que articula espacio, forma, medida, estimación y resolución de problemas. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde

esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Ministerio de Educación del Perú (2016a, 2016b); OECD (2023); Hong et al. (2019)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: la tesis analizó documentos normativos previos y observó ambigüedades en el tratamiento de superficie, área y magnitud; el currículo vigente ofrece un marco por competencias y estándares de progresión. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que una progresión coherente debe comenzar con atributos medibles, comparación y unidades arbitrarias, y avanzar hacia unidades convencionales, relaciones multiplicativas y argumentación. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Ministerio de Educación del Perú (2016a, 2016b); OECD (2023); Hong et al. (2019)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que la coherencia vertical importa porque las fórmulas de área suponen coordinaciones construidas en grados anteriores:

iteración de unidad, conservación, partición y estructura espacial. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, el currículo es una referencia necesaria pero no suficiente; la calidad de las experiencias, tareas y mediaciones docentes determina la profundidad conceptual. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: la evidencia nacional de desempeño matemático refuerza la necesidad de fortalecer razonamiento y modelización, no solo ejecución rutinaria. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y

columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Ministerio de Educación del Perú (2016a, 2016b); OECD (2023); Hong et al. (2019)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 3 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 3. Progresión curricular orientativa para el área en educación primaria

Tramo	Relaciones prioritarias	Ejemplos de experiencias
Inicio de primaria	Atributos medibles, comparación, unidades arbitrarias	Cubrir, ordenar y comparar superficies
Desarrollo intermedio	Iteración, conservación, cuadrículas, estimación	Mosaicos, mallas, transformaciones
Consolidación	Unidades convencionales, estructuras multiplicativas	Filas-columnas, cm^2 , problemas inversos
Extensión	Figuras compuestas, justificación, modelización	Descomposición, recomposición, datos faltantes

Elaboración propia en diálogo con el Currículo Nacional y el Programa Curricular de Primaria del MINEDU (2016a, 2016b).

La lectura de la Tabla 3 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Ministerio de Educación del Perú (2016a, 2016b); OECD (2023); Hong et al. (2019)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser

institucionalizado (Ministerio de Educación del Perú (2016a, 2016b); OECD (2023); Hong et al. (2019)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué

enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la ubicación del área dentro de una progresión curricular que articula espacio, forma, medida, estimación y resolución de problemas también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Ministerio de Educación del Perú (2016a, 2016b); OECD (2023); Hong et al. (2019)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de el currículo es una referencia necesaria pero no suficiente; la calidad de las experiencias, tareas y mediaciones docentes determina la profundidad conceptual, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del

contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, la evidencia nacional de desempeño matemático refuerza la necesidad de fortalecer razonamiento y modelización, no solo ejecución rutinaria plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Ministerio de Educación del Perú (2016a, 2016b); OECD (2023); Hong et al. (2019)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

1.4 DIFICULTADES PERSISTENTES: ÁREA, PERÍMETRO, FORMA Y MEDIDA

El núcleo de este apartado es los obstáculos que aparecen cuando el estudiante confunde el espacio ocupado con el contorno, la forma con la cantidad de superficie o el número con la magnitud. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y

cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Battista (2004); Hong et al. (2018); Lehmann (2023)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: la investigación de Castillo Pérez documentó intentos de medir perímetros y ángulos, errores de recubrimiento y dificultades para transferir el aprendizaje a nuevas situaciones. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que estudios internacionales muestran que estas dificultades no son anécdotas locales, sino patrones recurrentes asociados a la coordinación de unidades cuadradas y estructuras bidimensionales. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Battista (2004); Hong et al. (2018); Lehmann (2023)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que distinguir área y perímetro exige tareas donde ambas magnitudes varíen de forma independiente y explicaciones que obliguen a justificar qué atributo se conserva. Esta idea permite transformar la tarea

didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, los errores en figuras compuestas revelan si el alumno controla la inclusión, la partición y la recomposición o simplemente aplica una fórmula disponible. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: la evaluación debe registrar estrategias, representaciones y justificaciones, no únicamente el resultado numérico. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información

crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Battista (2004); Hong et al. (2018); Lehmann (2023)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 4 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 4. Obstáculos conceptuales frecuentes en la medición de área

Obstáculo	Manifestación observable	Tarea de diagnóstico
Área–perímetro	Suma lados cuando se pide superficie	Figuras con igual perímetro y distinta área
Forma–área	Cree que formas distintas no pueden ser equivalentes	Cortar y recomponer sin pérdida
Número–magnitud	Cree que cambia el área al cambiar la unidad	Medir la misma región con unidades distintas
Unidad lineal–cuadrada	Multiplica longitudes sin interpretar cobertura	Construir arreglos y explicar la unidad cuadrada
Conteo sin estructura	Cuenta uno a uno sin coordinar filas y columnas	Retirar cuadrícula parcial y reconstruir unidades

Elaboración propia a partir de Battista (2004), Hong et al. (2018) y Castillo Pérez (2015).

La lectura de la Tabla 4 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Battista (2004); Hong et al. (2018); Lehmann (2023)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Battista (2004); Hong et al. (2018); Lehmann (2023)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, los obstáculos que aparecen cuando el estudiante confunde el espacio ocupado con el contorno, la forma con la cantidad de superficie o el número con la magnitud también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Battista (2004); Hong et al. (2018); Lehmann (2023)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de los errores en figuras compuestas revelan si el alumno controla la inclusión, la partición y la recomposición o simplemente aplica una fórmula disponible, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas,

encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, la evaluación debe registrar estrategias, representaciones y justificaciones, no únicamente el resultado numérico plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Battista (2004); Hong et al. (2018); Lehmann (2023)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

1.5 ACTUALIDAD CIENTÍFICA Y AGENDA DE INVESTIGACIÓN

El núcleo de este apartado es la vigencia de la medición geométrica como campo donde convergen razonamiento espacial, conocimiento conceptual, diseño curricular y tecnología educativa. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Idrus et al.

(2022); Vargas Herrera et al. (2025); Atit et al. (2022)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: los hallazgos de 2015 se mantienen relevantes porque la tensión entre cálculo procedimental y significado conceptual continúa presente en revisiones recientes. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que las revisiones contemporáneas sitúan el conocimiento conceptual, las trayectorias de aprendizaje y la visualización espacial como ejes centrales para mejorar el desempeño. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Idrus et al. (2022); Vargas Herrera et al. (2025); Atit et al. (2022)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que la investigación actual también examina recursos digitales, manipulativos, evaluación formativa y variación sistemática de tareas. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de

estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, la agenda futura requiere estudios longitudinales, muestras diversas y análisis de transferencia que conecten primaria con aprendizajes posteriores. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: la contribución del caso peruano es ofrecer evidencia microdidáctica rica sobre decisiones, errores y transformaciones de estrategia. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente

cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Idrus et al. (2022); Vargas Herrera et al. (2025); Atit et al. (2022)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Idrus et al. (2022); Vargas Herrera et al. (2025); Atit et al. (2022)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué

relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Idrus et al. (2022); Vargas Herrera et al. (2025); Atit et al. (2022)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios

sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la vigencia de la medición geométrica como campo donde convergen razonamiento espacial, conocimiento conceptual, diseño curricular y tecnología educativa también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Idrus et al. (2022); Vargas Herrera et al. (2025); Atit et al. (2022)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de la agenda futura requiere estudios longitudinales, muestras diversas y análisis de transferencia que conecten primaria con aprendizajes posteriores, puede

variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, la contribución del caso peruano es ofrecer evidencia microdidáctica rica sobre decisiones, errores y transformaciones de estrategia plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Idrus et al. (2022); Vargas Herrera et al. (2025); Atit et al. (2022)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

El recorrido del capítulo permite integrar sus apartados como un argumento único: el aprendizaje del área no depende de una técnica aislada, sino de la construcción progresiva de invariantes, unidades y estrategias que se ponen a prueba en situaciones diversas. Los marcos teóricos, la evidencia reciente y el caso de origen convergen en la necesidad de diseñar experiencias que hagan visible el pensamiento y que permitan

pasar de acciones concretas a representaciones y generalizaciones con significado. El capítulo siguiente retoma esta conclusión y la proyecta hacia un nuevo nivel de análisis, manteniendo como criterio la trazabilidad entre evidencia, interpretación y propuesta didáctica.

CAPÍTULO II

EL ÁREA COMO MAGNITUD: ESTRUCTURA MATEMÁTICA, UNIDADES Y RAZONAMIENTO DE MEDIDA

El segundo capítulo se concentra en la matemática del área como magnitud. La atención se desplaza hacia las relaciones que sostienen la medición: superficie, equivalencia, unidad, recubrimiento, aditividad, conservación, estructura bidimensional y generalización. Esta reconstrucción permite explicar por qué dos figuras pueden tener la misma área con formas diferentes y por qué una misma superficie puede recibir medidas numéricas distintas según la unidad. El capítulo conecta estas propiedades con trayectorias de razonamiento y con estrategias de descomposición y recomposición, de modo que la fórmula aparezca como síntesis de una estructura y no como punto de partida arbitrario.

2.1 SUPERFICIE, ÁREA, MEDIDA Y NÚMERO: DISTINCIONES FUNDAMENTALES

El núcleo de este apartado es la separación conceptual entre el soporte geométrico, la magnitud asociada, la medida obtenida y el número que representa esa medida respecto de una unidad. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Douady y Perrin-Glorian (1987); Baltar (1999); Idrus et al. (2022)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: la tesis adopta explícitamente esta distinción y la usa para interpretar por qué una misma superficie puede recibir números distintos cuando cambia la unidad. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que la distinción protege contra dos reducciones frecuentes: identificar el área con la figura y identificar el área con el número desnudo. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Douady y Perrin-Glorian (1987); Baltar (1999); Idrus et al. (2022)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que el lenguaje matemático escolar debe hacer visible que medir es comparar una magnitud con una unidad de la misma naturaleza. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, las equivalencias entre superficies y la invariancia bajo ciertas transformaciones permiten construir el área como propiedad independiente de la forma. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: el docente puede usar cambios de unidad para generar conflicto cognitivo productivo y exigir explicaciones sobre lo que cambia y lo que permanece. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Douady y Perrin-Glorian (1987); Baltar (1999); Idrus et al. (2022)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables,

aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 5 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 5. Relaciones entre los cuadros geométrico, magnitud y numérico

Cuadro	Objeto central	Operación cognitiva	Ejemplo
Geométrico	Superficie/figura	Transformar, descomponer, superponer	Dos polígonos de formas distintas
Magnitud	Área como clase de equivalencia	Reconocer conservación y orden	A y B tienen la misma área
Numérico	Medida respecto de una unidad	Asignar y comparar números con unidad	12 cuadrados o 24 triángulos

Elaboración propia a partir de Douady y Perrin-Glorian (1987) y Baltar (1999).

La lectura de la Tabla 5 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Douady y Perrin-Glorian (1987); Baltar (1999); Idrus et al. (2022)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Douady y Perrin-Glorian (1987); Baltar (1999); Idrus et al. (2022)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es

pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la separación conceptual entre el soporte geométrico, la magnitud asociada, la medida obtenida y el número que representa esa medida respecto de una unidad también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones.

La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Douady y Perrin-Glorian (1987); Baltar (1999); Idrus et al. (2022)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de las equivalencias entre superficies y la invariancia bajo ciertas transformaciones permiten construir el área como propiedad independiente de la forma, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, el docente puede usar cambios de unidad para generar conflicto cognitivo productivo y exigir explicaciones sobre lo que cambia y lo que permanece plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y

el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Douady y Perrin-Glorian (1987); Baltar (1999); Idrus et al. (2022)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

2.2 PROPIEDADES MATEMÁTICAS DE LA MAGNITUD ÁREA

El núcleo de este apartado es las propiedades que sostienen la cuantificación del área: positividad, aditividad, equivalencia, conservación y dependencia de la unidad en la medida numérica. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Freudenthal (1983); Douady y Perrin-Glorian (1987); Lehmann (2023)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: el estudio de origen operacionaliza estas ideas mediante recubrimiento, conteo, comparación y descomposición de polígonos. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para

evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que la aditividad explica por qué una figura compuesta puede descomponerse sin alterar el total y por qué las áreas parciales pueden recomponerse. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Freudenthal (1983); Douady y Perrin-Glorian (1987); Lehmann (2023)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que la conservación permite comprender que cortar y reorganizar partes no modifica la magnitud cuando no hay solapamientos ni pérdidas. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, la positividad y la elección de unidad dan sentido a los números que aparecen en la medición y evitan tratar el resultado como una etiqueta arbitraria. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar

procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: estas propiedades deben aparecer en problemas y argumentaciones antes de ser presentadas como formulaciones formales. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Freudenthal (1983); Douady y Perrin-Glorian (1987); Lehmann (2023)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica.

Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 6 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 6. Propiedades estructurales de la magnitud área

Propiedad	Significado escolar	Situación de aprendizaje
Positividad	Una región no vacía tiene medida positiva	Comparar superficies muy pequeñas
Aditividad	El área total es suma de áreas de partes disjuntas	Descomponer figuras compuestas
Conservación	Reorganizar partes no altera el área	Recortar y recomponer
Equivalencia	Formas diferentes pueden compartir área	Construir figuras equivalentes
Dependencia de unidad en la medida	El número cambia con el patrón	Cambiar cuadrado por triángulo o rectángulo

Elaboración propia a partir de Freudenthal (1983), Douady y Perrin-Glorian (1987) y Lehmann (2023).

La lectura de la Tabla 6 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Freudenthal (1983); Douady y Perrin-Glorian (1987); Lehmann (2023)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Freudenthal (1983); Douady y Perrin-Glorian (1987); Lehmann (2023)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran

relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, las propiedades que sostienen la cuantificación del área: positividad, aditividad, equivalencia, conservación y dependencia de la unidad en la medida numérica también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Freudenthal (1983); Douady y Perrin-Glorian (1987); Lehmann (2023)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se

conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de la positividad y la elección de unidad dan sentido a los números que aparecen en la medición y evitan tratar el resultado como una etiqueta arbitraria, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, estas propiedades deben aparecer en problemas y argumentaciones antes de ser presentadas como formulaciones formales plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Freudenthal (1983); Douady y Perrin-Glorian (1987); Lehmann (2023)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta

coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

2.3 LA UNIDAD DE ÁREA: RECUBRIMIENTO, ITERACIÓN Y ESTRUCTURA BIDIMENSIONAL

El núcleo de este apartado es la unidad cuadrada como objeto compuesto que debe coordinar dos dimensiones y recubrir una región sin huecos ni superposiciones. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Kamii y Kysh (2006); Clements et al. (2018); Battista (2004)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: en la tesis, el cambio entre cuadrados, rectángulos y triángulos funcionó como variable didáctica para revelar que la medida cambia aunque el área permanezca. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que la evidencia muestra que ver una cuadrícula no garantiza por sí mismo comprender la unidad de área; el alumno debe construir la relación entre unidad, cobertura y estructura de arreglo. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta

numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Kamii y Kysh (2006); Clements et al. (2018); Battista (2004)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que iterar una unidad exige mantener su tamaño y orientación conceptual, mientras que estructurar filas y columnas permite pasar del conteo uno a uno al razonamiento multiplicativo. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, las unidades arbitrarias son especialmente valiosas porque obligan a razonar sobre equivalencias antes de introducir centímetros cuadrados u otras unidades convencionales. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: las tareas deben variar tamaño, forma y orientación de la unidad para evitar que la cuadrícula se convierta en una muleta perceptiva. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea

establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Kamii y Kysh (2006); Clements et al. (2018); Battista (2004)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 7 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 7. Niveles de estructuración de unidades de área

Nivel	Rasgo del razonamiento	Indicador observable
Recubrimiento inicial	Necesita unidades visibles y conteo directo	Cuenta cuadrados uno a uno
Estructura parcial	Reconoce filas o columnas incompletamente	Agrupar unidades en segmentos
Unidad compuesta	Concibe una fila o columna como grupo	Itera una fila como unidad
Estructura bidimensional	Coordina filas y columnas	Anticipa cuadrados no dibujados
Relación multiplicativa	Interpreta producto como conteo de unidades cuadradas	Justifica $\text{base} \times \text{altura}$

Síntesis editorial basada en Battista (2004), Clements et al. (2018) e Idrus et al. (2022).

La lectura de la Tabla 7 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Kamii y Kysh (2006); Clements et al. (2018); Battista (2004)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser

momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Kamii y Kysh (2006); Clements et al. (2018); Battista (2004)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué

enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la unidad cuadrada como objeto compuesto que debe coordinar dos dimensiones y recubrir una región sin huecos ni superposiciones también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Kamii y Kysh (2006); Clements et al. (2018); Battista (2004)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de las unidades arbitrarias son especialmente valiosas porque obligan a razonar sobre equivalencias antes de introducir centímetros cuadrados u otras unidades convencionales, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve

entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, las tareas deben variar tamaño, forma y orientación de la unidad para evitar que la cuadrícula se convierta en una muleta perceptiva plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Kamii y Kysh (2006); Clements et al. (2018); Battista (2004)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

2.4 DE LA COMPARACIÓN A LA FÓRMULA: TRAYECTORIAS DEL RAZONAMIENTO DE ÁREA

El núcleo de este apartado es una trayectoria que avanza desde comparaciones cualitativas y recubrimientos hacia unidades compuestas, arreglos rectangulares y fórmulas con significado. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones

geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Clements y Sarama (2014); Battista (2004); Harris et al. (2022)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: los procedimientos observados en la tesis —conteo, completar, descomponer, recomponer y cambiar de unidad— pueden leerse como momentos de una progresión conceptual. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que las trayectorias de aprendizaje describen niveles de razonamiento y ofrecen hipótesis sobre tareas que pueden hacer avanzar al estudiante. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Clements y Sarama (2014); Battista (2004); Harris et al. (2022)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que la fórmula base por altura adquiere significado cuando el alumno interpreta una dimensión como cantidad de unidades en una fila y la otra como cantidad de filas. Esta idea permite transformar la

tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, el paso al cálculo simbólico debe conservar vínculos con representaciones espaciales para que la eficiencia no sustituya la comprensión. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Figura 2. Trayectoria conceptual del área

Trayectoria conceptual del área



Elaboración propia a partir de los marcos teóricos y relaciones desarrollados en este libro.

La figura sintetiza relaciones que en el texto se analizan de manera separada. Su lectura debe hacerse de forma funcional: las flechas representan dependencias o transiciones didácticas, no una secuencia psicológica rígida. El valor del esquema consiste en ayudar a identificar qué componentes deben coordinarse cuando se diseña o interpreta una situación de aprendizaje del área.

Conviene introducir una cautela: la evaluación basada en progresiones permite localizar el tipo de coordinación que falta y diseñar retroalimentación específica. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Clements y Sarama (2014); Battista (2004); Harris et al. (2022)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Clements y Sarama (2014); Battista (2004); Harris et al. (2022)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Clements y Sarama (2014); Battista (2004); Harris et al. (2022)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos,

problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a

las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, una trayectoria que avanza desde comparaciones cualitativas y recubrimientos hacia unidades compuestas, arreglos rectangulares y fórmulas con significado también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Clements y Sarama (2014); Battista (2004); Harris et al. (2022)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de el paso al cálculo simbólico debe conservar vínculos con representaciones espaciales para que la eficiencia no sustituya la comprensión, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, la evaluación basada en progresiones permite localizar el tipo de coordinación que falta y diseñar retroalimentación específica

plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Clements y Sarama (2014); Battista (2004); Harris et al. (2022)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

2.5 FIGURAS COMPUESTAS, DESCOMPOSICIÓN Y RECOMPOSICIÓN

El núcleo de este apartado es la medición de figuras compuestas como escenario privilegiado para conectar estructura geométrica, aditividad y flexibilidad estratégica. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Lehmann (2023); Zacharos (2006); King et al. (2023)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: la tesis encontró que las estudiantes podían transformar figuras no

familiares en configuraciones conocidas y que esta estrategia fue especialmente visible en varios polígonos complejos. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que investigaciones recientes muestran que la competencia no consiste solo en conocer fórmulas de partes, sino en elegir una descomposición eficiente y recomponer correctamente las áreas. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Lehmann (2023); Zacharos (2006); King et al. (2023)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que las configuraciones no convencionales obligan a diferenciar información relevante, crear líneas auxiliares y verificar que las partes cubran exactamente la región original. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, comparar dos descomposiciones de una misma figura hace visible que la estrategia puede cambiar sin cambiar el área total. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: la enseñanza debe valorar la adaptabilidad de las estrategias y la justificación, no únicamente la rapidez del cálculo. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Lehmann (2023); Zacharos (2006); King et al. (2023)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a

estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 8 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 8. Estrategias para figuras compuestas

Estrategia	Acción	Condición de validez	Riesgo
Descomposición aditiva	Separar en figuras conocidas y sumar	Partes sin solapamiento cubren la figura	Omitir o duplicar regiones
Complementación	Encerrar y restar excedentes	El contenedor está bien definido	Sumar en lugar de restar
Recomposición	Mover partes para obtener figura conocida	Transformación conserva área	Modificar escala o perder partes
Cuadrícula	Contar unidades completas y fracciones	Unidad estable y cobertura correcta	Contar bordes o cuadrícula deformada
Fórmula derivada	Usar dimensiones de partes pertinentes	Las dimensiones representan la figura	Aplicar fórmula por apariencia

Elaboración propia a partir de Lehmann (2023), Zacharos (2006) y Castillo Pérez (2015).

La lectura de la Tabla 8 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Lehmann (2023); Zacharos (2006); King et al. (2023)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Lehmann (2023); Zacharos (2006); King et al. (2023)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es

pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la medición de figuras compuestas como escenario privilegiado para conectar estructura geométrica, aditividad y flexibilidad estratégica también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición

muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Lehmann (2023); Zacharos (2006); King et al. (2023)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de comparar dos descomposiciones de una misma figura hace visible que la estrategia puede cambiar sin cambiar el área total, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, la enseñanza debe valorar la adaptabilidad de las estrategias y la justificación, no únicamente la rapidez del cálculo plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona

más allá de la situación en la que fue construido (Lehmann (2023); Zacharos (2006); King et al. (2023)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

El recorrido del capítulo permite integrar sus apartados como un argumento único: el aprendizaje del área no depende de una técnica aislada, sino de la construcción progresiva de invariantes, unidades y estrategias que se ponen a prueba en situaciones diversas. Los marcos teóricos, la evidencia reciente y el caso de origen convergen en la necesidad de diseñar experiencias que hagan visible el pensamiento y que permitan pasar de acciones concretas a representaciones y generalizaciones con significado. El capítulo siguiente retoma esta conclusión y la proyecta hacia un nuevo nivel de análisis, manteniendo como criterio la trazabilidad entre evidencia, interpretación y propuesta didáctica.

CAPÍTULO III

APRENDER GEOMETRÍA MEDIANTE SITUACIONES: TEORÍA, DISEÑO Y VALIDACIÓN DIDÁCTICA

El tercer capítulo aborda el diseño de condiciones para aprender. La Teoría de Situaciones Didácticas y la Ingeniería Didáctica ofrecen herramientas para pensar el problema, el medio, la autonomía del estudiante, las variables de la tarea y la intervención docente como componentes de un sistema. Lejos de presentar la teoría como un catálogo de términos, el capítulo la utiliza para interpretar decisiones concretas: cuándo una cuadrícula funciona como medio, qué significa devolver un problema al estudiante, cómo se organiza la validación y por qué el análisis a priori necesita confrontarse con producciones reales. Esta perspectiva prepara la lectura metodológica del caso que aparecerá más adelante.

3.1 SITUACIONES DIDÁCTICAS, MEDIO Y DEVOLUCIÓN

El núcleo de este apartado es la concepción del aprendizaje matemático como adaptación a un medio cuidadosamente diseñado que devuelve información al estudiante sin revelar de inmediato la respuesta. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Brousseau (2007); Perrin-Glorian (2009); Artigue et al. (1995)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

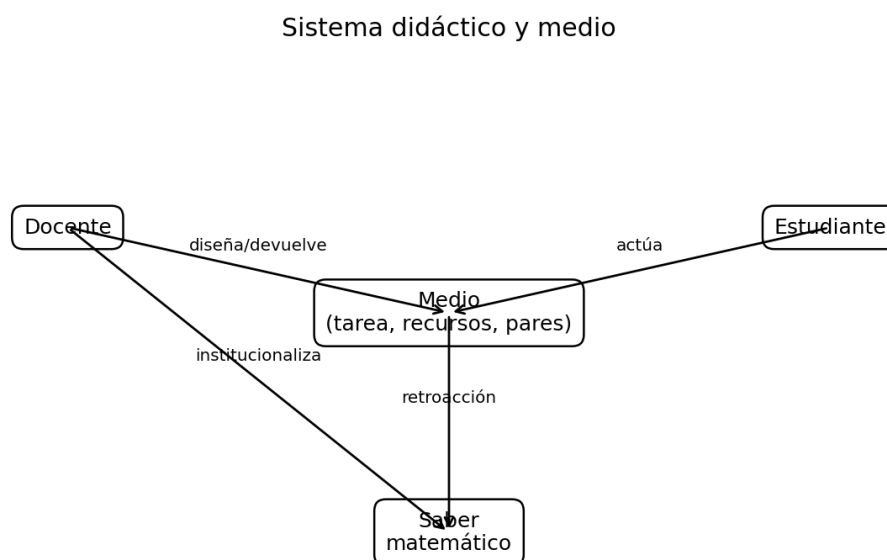
La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: la tesis se apoya en la Teoría de Situaciones Didácticas para organizar materiales, consignas, interacciones y variables que hagan necesaria la noción de área como magnitud. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que el medio incluye objetos, representaciones, reglas de acción, compañeros y consecuencias matemáticas de las decisiones, no solo materiales físicos. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Brousseau (2007); Perrin-Glorian (2009); Artigue et al. (1995)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que la devolución implica que el estudiante asuma el problema como propio y acepte la responsabilidad de producir y revisar estrategias. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, una situación bien diseñada debe permitir que el conocimiento emerja como herramienta funcional antes de ser institucionalizado. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Figura 3. Sistema didáctico y medio



Elaboración propia a partir de los marcos teóricos y relaciones desarrollados en este libro.

La figura sintetiza relaciones que en el texto se analizan de manera separada. Su lectura debe hacerse de forma funcional: las flechas representan dependencias o transiciones didácticas, no una secuencia psicológica rígida. El valor del esquema consiste en ayudar a identificar qué componentes deben coordinarse cuando se diseña o interpreta una situación de aprendizaje del área.

Conviene introducir una cautela: el análisis del medio ayuda a distinguir entre una ayuda productiva y una intervención que reduce el problema a seguir indicaciones. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales.

Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Brousseau (2007); Perrin-Glorian (2009); Artigue et al. (1995)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos

visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 9 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 9. Componentes del medio didáctico para aprender área

Componente	Función	Ejemplo en el caso
Problema	Crear necesidad matemática	Medir polígonos sin medidas dadas
Material	Permitir acciones y retroacciones	Recortes, cuadrícula, unidades
Reglas	Delimitar acciones posibles	Trabajo por parejas, socialización
Pares	Producir contraste y formulación	Discusión A1–A2 y B1–B2
Docente	Devolver e institucionalizar	Preguntas, relectura, formalización

Elaboración propia a partir de Brousseau (2007) y Castillo Pérez (2015).

La lectura de la Tabla 9 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Brousseau (2007); Perrin-Glorian (2009); Artigue et al. (1995)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea

modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Brousseau (2007); Perrin-Glorian (2009); Artigue et al. (1995)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso

explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la concepción del aprendizaje matemático como adaptación a un medio cuidadosamente diseñado que devuelve información al estudiante sin revelar de inmediato la respuesta también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Brousseau (2007); Perrin-Glorian (2009); Artigue et al. (1995)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de una situación bien diseñada debe permitir que el conocimiento emerja como herramienta funcional antes de ser institucionalizado, puede variarse la forma sin

cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, el análisis del medio ayuda a distinguir entre una ayuda productiva y una intervención que reduce el problema a seguir indicaciones plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Brousseau (2007); Perrin-Glorian (2009); Artigue et al. (1995)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

3.2 ACCIÓN, FORMULACIÓN, VALIDACIÓN E INSTITUCIONALIZACIÓN

El núcleo de este apartado es las fases de la situación como formas de actividad matemática que articulan exploración, comunicación, prueba y estabilización cultural del conocimiento. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación

aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Brousseau (1986, 2007); Perrin-Glorian (2009); Castillo Pérez (2015)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: en el caso estudiado, las estudiantes actuaron sobre recortes y cuadrículas, formularon procedimientos a sus compañeras y validaron algunas estrategias al confrontar resultados. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

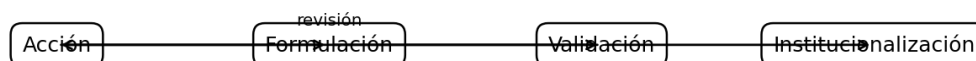
La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que la acción permite producir estrategias implícitas; la formulación obliga a representarlas y comunicarlas; la validación exige razones; la institucionalización conecta las producciones con el saber matemático compartido. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Brousseau (1986, 2007); Perrin-Glorian (2009); Castillo Pérez (2015)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que las fases no deben interpretarse como una secuencia rígida, pues los estudiantes pueden regresar a la acción cuando una formulación resulta insuficiente. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, el valor pedagógico está en coordinar autonomía y formalización sin eliminar la incertidumbre matemática necesaria para aprender. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Figura 4. Dinámica de las fases de una situación

Dinámica de las fases de una situación



Elaboración propia a partir de los marcos teóricos y relaciones desarrollados en este libro.

La figura sintetiza relaciones que en el texto se analizan de manera separada. Su lectura debe hacerse de forma funcional: las flechas representan dependencias o transiciones didácticas, no una secuencia psicológica rígida. El valor del esquema consiste en ayudar a identificar qué componentes deben coordinarse cuando se diseña o interpreta una situación de aprendizaje del área.

Conviene introducir una cautela: la evidencia del aula debe analizar qué conocimiento se moviliza en cada tránsito y qué intervenciones docentes transforman su función. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o

puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Brousseau (1986, 2007); Perrin-Glorian (2009); Castillo Pérez (2015)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 10 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 10. Fases de la Teoría de Situaciones Didácticas y evidencias esperables

Fase	Función	Evidencia del estudiante	Acción docente predominante
Acción	Explorar y decidir	Manipula, prueba, cuenta, transforma	Sostiene el medio
Formulación	Comunicar estrategia	Describe procedimientos y unidades	Solicita claridad y comparación
Validación	Justificar y refutar	Argumenta por qué funciona	Pide razones y contraejemplos
Institucionalización	Estabilizar saber	Relaciona producción con lenguaje formal	Nombra, organiza y generaliza

Elaboración propia a partir de Brousseau (1986, 2007).

La lectura de la Tabla 10 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Brousseau (1986, 2007); Perrin-Glorian (2009); Castillo Pérez (2015)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Brousseau (1986, 2007); Perrin-Glorian (2009); Castillo Pérez (2015)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, las fases de la situación como formas de actividad matemática que articulan exploración, comunicación, prueba y estabilización cultural del conocimiento también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Brousseau (1986, 2007); Perrin-Glorian (2009); Castillo Pérez (2015)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de el valor pedagógico está en coordinar autonomía y formalización sin eliminar la incertidumbre matemática necesaria para aprender, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y

desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, la evidencia del aula debe analizar qué conocimiento se moviliza en cada tránsito y qué intervenciones docentes transforman su función plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Brousseau (1986, 2007); Perrin-Glorian (2009); Castillo Pérez (2015)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

3.3 CONTRATO DIDÁCTICO, INTERVENCIÓN DOCENTE Y ESTATUTO DEL ERROR

El núcleo de este apartado es las expectativas recíprocas entre docente y estudiantes y su influencia en la manera de interpretar consignas, ayudas, errores y respuestas esperadas. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Brousseau

(2007); Santos (2022); Karaman (2021)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: la tesis registra momentos en que el docente duda si intervenir porque las estudiantes miden perímetros o ángulos, haciendo visible la tensión entre sostener la autonomía y reorientar la actividad. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que el contrato didáctico explica por qué los alumnos buscan señales del profesor y por qué una ayuda demasiado transparente puede sustituir el razonamiento por adivinación. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Brousseau (2007); Santos (2022); Karaman (2021)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que el error debe tratarse como producción informativa sobre el sistema de ideas del alumno y no únicamente como déficit a corregir. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye

una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, preguntas de contraste, relectura de la consigna y comparación de procedimientos suelen conservar mayor potencial cognitivo que indicar directamente un método. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: la institucionalización posterior puede recoger errores productivos para delimitar las condiciones de validez de cada estrategia. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Brousseau (2007); Santos (2022); Karaman (2021)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 11 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 11. Intervenciones docentes y su efecto potencial

Intervención	Potencial productivo	Riesgo didáctico
Pedir releer la consigna	Devuelve responsabilidad al estudiante	Puede ser insuficiente si el obstáculo es conceptual
Preguntar qué se está midiendo	Hace visible el atributo	Puede convertirse en pista si es demasiado dirigida
Comparar dos procedimientos	Promueve validación	Puede privilegiar el procedimiento del docente
Mostrar un contraejemplo	Genera conflicto productivo	Puede cerrar exploración si revela la solución
Institucionalizar	Conecta producción y saber	Prematura, puede anular búsqueda

Elaboración propia a partir de Brousseau (2007), Santos (2022) y Castillo Pérez (2015).

La lectura de la Tabla 11 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino

también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Brousseau (2007); Santos (2022); Karaman (2021)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Brousseau (2007); Santos (2022); Karaman (2021)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde

diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, las expectativas recíprocas entre docente y estudiantes y su influencia en la manera de interpretar consignas, ayudas, errores y

respuestas esperadas también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Brousseau (2007); Santos (2022); Karaman (2021)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de preguntas de contraste, relectura de la consigna y comparación de procedimientos suelen conservar mayor potencial cognitivo que indicar directamente un método, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, la institucionalización posterior puede recoger errores productivos para delimitar las condiciones de validez de cada estrategia plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones

y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Brousseau (2007); Santos (2022); Karaman (2021)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

3.4 VARIABLES DIDÁCTICAS Y CONTROL DE LA COMPLEJIDAD

El núcleo de este apartado es la modificación intencional de características de la tarea que obligan al estudiante a reorganizar estrategias y hacen observable el conocimiento movilizado. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Brousseau (2007); Silva (2010); Lehmann (2023)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: en la tesis se variaron unidad de medida, tipo de figura, cuadrícula o malla, complejidad y carácter entero o fraccionario de las medidas. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del

estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que una variable didáctica es valiosa cuando un cambio de valor modifica de manera previsible la economía de estrategias, no cuando solo altera la apariencia. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Brousseau (2007); Silva (2010); Lehmann (2023)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que la posición de la figura respecto de una malla, el tamaño de la unidad o la visibilidad de filas y columnas pueden facilitar o impedir procedimientos de conteo directo. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, la progresión de complejidad debe evitar tanto la trivialidad como la sobrecarga que empuja al alumno a abandonar la tarea. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se

orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: diseñar familias de problemas con variaciones controladas permite estudiar transferencia y estabilidad conceptual. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Brousseau (2007); Silva (2010); Lehmann (2023)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica.

Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 12 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 12. Variables didácticas pertinentes para el concepto de área

Variable	Valores posibles	Efecto esperado sobre estrategias
Unidad	Cuadrado, triángulo, rectángulo	Modifica conteo y equivalencias
Figura	Simple, compuesta, irregular	Exige descomposición o recomposición
Soporte	Blanco, cuadrícula, malla triangular	Hace visible u oculta estructura
Posición	Alineada, parcial, no alineada	Dificulta conteo directo
Medida	Entera, fraccionaria	Exige partición de unidades
Disponibilidad de fórmula	Explícita, implícita, innecesaria	Modula dependencia procedimental

Elaboración propia a partir de Silva (2010), Brousseau (2007) y Castillo Pérez (2015).

La lectura de la Tabla 12 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Brousseau (2007); Silva (2010); Lehmann (2023)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Brousseau (2007); Silva (2010); Lehmann (2023)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la modificación intencional de características de la tarea que obligan al estudiante a reorganizar estrategias y hacen observable el conocimiento movilizado también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Brousseau (2007); Silva (2010); Lehmann (2023)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de la progresión de complejidad debe evitar tanto la trivialidad como la sobrecarga que empuja al alumno a abandonar la tarea, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, diseñar familias de problemas con variaciones controladas permite estudiar transferencia y estabilidad conceptual plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Brousseau (2007); Silva (2010); Lehmann (2023)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

3.5 INGENIERÍA DIDÁCTICA COMO METODOLOGÍA DE DISEÑO Y ANÁLISIS

El núcleo de este apartado es la articulación entre análisis preliminar, diseño y análisis a priori, experimentación, análisis a posteriori y validación como forma de investigar fenómenos didácticos. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Artigue et al. (1995); Brousseau (2007); Castillo Pérez (2015)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: Castillo Pérez empleó este marco para anticipar estrategias, observar la experimentación y contrastar respuestas esperadas con producciones reales. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que el valor de la Ingeniería Didáctica reside en hacer explícitas las hipótesis de diseño y someterlas al comportamiento del sistema didáctico. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental;

su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Artigue et al. (1995); Brousseau (2007); Castillo Pérez (2015)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que el análisis a priori no es una predicción infalible, sino un mapa de posibilidades que ayuda a interpretar decisiones y a reconocer fenómenos no anticipados. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, el contraste a posteriori obliga a revisar tanto las hipótesis sobre los estudiantes como las decisiones de diseño y las intervenciones docentes. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: en investigaciones actuales puede complementarse con trazas digitales, análisis multimodal y criterios de transferibilidad sin perder su lógica de diseño controlado. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de

manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Artigue et al. (1995); Brousseau (2007); Castillo Pérez (2015)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y

totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Artigue et al. (1995); Brousseau (2007); Castillo Pérez (2015)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Artigue et al. (1995); Brousseau (2007); Castillo Pérez (2015)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la articulación entre análisis preliminar, diseño y análisis a priori, experimentación, análisis a posteriori y validación como forma de investigar fenómenos didácticos también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la

enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Artigue et al. (1995); Brousseau (2007); Castillo Pérez (2015)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de el contraste a posteriori obliga a revisar tanto las hipótesis sobre los estudiantes como las decisiones de diseño y las intervenciones docentes, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, en investigaciones actuales puede complementarse con trazas digitales, análisis multimodal y criterios de transferibilidad sin perder su lógica de diseño controlado plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite

afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Artigue et al. (1995); Brousseau (2007); Castillo Pérez (2015)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

El recorrido del capítulo permite integrar sus apartados como un argumento único: el aprendizaje del área no depende de una técnica aislada, sino de la construcción progresiva de invariantes, unidades y estrategias que se ponen a prueba en situaciones diversas. Los marcos teóricos, la evidencia reciente y el caso de origen convergen en la necesidad de diseñar experiencias que hagan visible el pensamiento y que permitan pasar de acciones concretas a representaciones y generalizaciones con significado. El capítulo siguiente retoma esta conclusión y la proyecta hacia un nuevo nivel de análisis, manteniendo como criterio la trazabilidad entre evidencia, interpretación y propuesta didáctica.

CAPÍTULO IV

RECURSOS Y MEDIACIONES: CUADRÍCULAS, MANIPULATIVOS, REPRESENTACIONES Y TECNOLOGÍAS DINÁMICAS

El cuarto capítulo estudia las mediaciones que hacen posible el tránsito entre acción, representación y simbolización. Manipulativos, cuadrículas, gestos, dibujos, visualización espacial y GeoGebra no se tratan como recursos aislados, sino como componentes de una ecología representacional. La pregunta orientadora es qué relación matemática hace visible cada recurso y qué dependencia puede crear si no se retira o conecta con otros registros. La evaluación formativa completa el análisis al mostrar cómo las producciones durante la actividad pueden convertirse en evidencia para decidir la siguiente intervención o variación de la tarea.

4.1 MANIPULATIVOS Y MATERIAL CONCRETO: POSIBILIDADES Y CONDICIONES

El núcleo de este apartado es el papel de recortes, unidades móviles, mosaicos y otros objetos como mediadores entre acciones físicas y relaciones matemáticas. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Byrne et al. (2023); Foulkes et al. (2023); King et al. (2023)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: la tesis utilizó recortes de cartulina, unidades arbitrarias y hojas cuadrículadas para que las estudiantes recubrieran, transformaran y compararan superficies. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que las revisiones recientes muestran que los manipulativos pueden favorecer el aprendizaje, pero su eficacia depende de la estructura de la tarea, la orientación docente y el puente hacia representaciones más abstractas. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Byrne et al. (2023); Foulkes et al. (2023); King et al. (2023)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que un objeto demasiado rico perceptivamente puede atraer la atención hacia rasgos irrelevantes; uno excesivamente abstracto puede no ofrecer apoyos suficientes para construir la relación. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que

el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, la secuencia concreta–representacional–simbólica es productiva cuando cada representación conserva explícitamente las relaciones matemáticas relevantes. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: el docente debe preguntar qué representa cada pieza, qué unidad conserva y cómo se traduce la acción física a una afirmación matemática. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Byrne et al. (2023); Foulkes et al. (2023); King et al. (2023)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 13 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 13. Criterios para seleccionar manipulativos en tareas de área

Criterio	Pregunta de diseño	Indicador de calidad
Representacional	¿Qué relación matemática representa?	Correspondencia clara con unidad o superficie
Perceptivo	¿Qué rasgos pueden distraer?	Predominio de rasgos relevantes
Operativo	¿Qué acciones permite?	Superponer, recortar, iterar, transformar
Transición	¿Cómo se conecta con dibujo o símbolo?	Puente explícito entre acciones y representaciones
Accesibilidad	¿Puede usarse por distintos estudiantes?	Manipulación y lectura sencillas

Elaboración propia a partir de Byrne et al. (2023), Foulkes et al. (2023) y King et al. (2023).

La lectura de la Tabla 13 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino

también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Byrne et al. (2023); Foulkes et al. (2023); King et al. (2023)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Byrne et al. (2023); Foulkes et al. (2023); King et al. (2023)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde

diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, el papel de recortes, unidades móviles, mosaicos y otros objetos como mediadores entre acciones físicas y relaciones

matemáticas también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Byrne et al. (2023); Foulkes et al. (2023); King et al. (2023)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de la secuencia concreta–representacional–simbólica es productiva cuando cada representación conserva explícitamente las relaciones matemáticas relevantes, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, el docente debe preguntar qué representa cada pieza, qué unidad conserva y cómo se traduce la acción física a una afirmación matemática plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura

contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Byrne et al. (2023); Foulkes et al. (2023); King et al. (2023)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

4.2 CUADRÍCULAS, MALLAS Y ESTRUCTURACIÓN ESPACIAL

El núcleo de este apartado es el uso de cuadrículas como soporte para identificar unidades bidimensionales, organizar recubrimientos y construir arreglos rectangulares. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Clements et al. (2018); Battista (2004); Idrus et al. (2022)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: la cuadrícula fue el recurso más utilizado por las participantes del estudio y facilitó numerosos procedimientos de conteo y descomposición. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para

evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que sin embargo, una cuadrícula puede inducir conteo mecánico si no se exige justificar la unidad, coordinar filas y columnas o explicar equivalencias. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Clements et al. (2018); Battista (2004); Idrus et al. (2022)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que la estructuración espacial transforma una colección de cuadrados en un sistema organizado y prepara el paso hacia relaciones multiplicativas. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, alternar cuadrículas completas, parciales y ausentes permite observar si la estructura se ha internalizado o depende de marcas externas. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver

preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: las mallas triangulares y unidades no cuadradas amplían el repertorio y obligan a razonar sobre equivalencia entre unidades de forma diferente. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Clements et al. (2018); Battista (2004); Idrus et al. (2022)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de

medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 14 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 14. Variaciones de cuadrícula para diagnosticar estructuración

Formato	Qué hace visible	Qué permite diagnosticar
Cuadrícula completa	Todas las unidades	Conteo y reconocimiento de unidad
Cuadrícula parcial	Algunas filas/columnas	Reconstrucción de estructura
Malla triangular	Unidad no cuadrada	Equivalencias y partición
Sin cuadrícula	Solo la figura	Internalización de estructura
Figura no alineada	Intersecciones fraccionarias	Composición de partes y estimación

Elaboración propia a partir de Clements et al. (2018), Battista (2004) y Silva (2010).

La lectura de la Tabla 14 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Clements et al. (2018); Battista (2004); Idrus et al. (2022)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Clements et al. (2018); Battista (2004); Idrus et al. (2022)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, el uso de cuadrículas como soporte para identificar unidades bidimensionales, organizar recubrimientos y construir arreglos rectangulares también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Clements et al. (2018); Battista (2004); Idrus et al. (2022)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de alternar cuadrículas completas, parciales y ausentes permite observar si la estructura se ha internalizado o depende de marcas externas, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, las mallas triangulares y unidades no cuadradas amplían el repertorio y obligan a razonar sobre equivalencia entre unidades de forma diferente plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Clements et al. (2018); Battista (2004); Idrus et al. (2022)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

4.3 VISUALIZACIÓN ESPACIAL Y PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

El núcleo de este apartado es la visualización espacial como capacidad para transformar, coordinar y anticipar relaciones geométricas en tareas de medición de área. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Atit et al. (2022); Hawes et al. (2022); Harris et al. (2023)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: las estrategias de completar, girar, descomponer y recomponer observadas en el caso requieren imaginar relaciones entre partes y totalidad. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que los metaanálisis encuentran una relación positiva entre habilidades espaciales y rendimiento matemático, y efectos de entrenamientos espaciales sobre diversos resultados matemáticos. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se

apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Atit et al. (2022); Hawes et al. (2022); Harris et al. (2023)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que en área, la visualización ayuda a reconocer unidades ausentes, imaginar filas internas, comparar configuraciones y justificar transformaciones conservativas. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, el trabajo espacial debe integrarse a la argumentación matemática para no convertirse en mero entrenamiento perceptivo. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: dibujos, gestos, plegados, rotaciones y software dinámico pueden coordinarse para construir representaciones estables y transferibles. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del

problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Atit et al. (2022); Hawes et al. (2022); Harris et al. (2023)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 15 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la

literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 15. Procesos espaciales vinculados a la medición de área

Proceso espacial	Manifestación matemática	Tarea sugerida
Estructuración	Organiza unidades en arreglo	Completar filas ausentes
Rotación mental	Reconoce equivalencia bajo giro	Comparar figuras rotadas
Descomposición	Identifica partes constitutivas	Separar figura compuesta
Recomposición	Anticipa nueva configuración	Reordenar piezas con igual área
Visualización interna	Imagina unidades no dibujadas	Mallas parciales

Elaboración propia a partir de Atit et al. (2022), Hawes et al. (2022) y Harris et al. (2023).

La lectura de la Tabla 15 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Atit et al. (2022); Hawes et al. (2022); Harris et al. (2023)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Atit et al. (2022); Hawes et al. (2022); Harris et al. (2023)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente

complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación

conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la visualización espacial como capacidad para transformar, coordinar y anticipar relaciones geométricas en tareas de medición de área también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Atit et al. (2022); Hawes et al. (2022); Harris et al. (2023)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de el trabajo espacial debe integrarse a la argumentación matemática para no convertirse en mero entrenamiento perceptivo, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, dibujos, gestos, plegados, rotaciones y software dinámico pueden coordinarse para construir representaciones estables y transferibles plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Atit et al. (2022); Hawes et al. (2022); Harris et al. (2023)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

4.4 GEOGEBRA Y GEOMETRÍA DINÁMICA CON SENTIDO CONCEPTUAL

El núcleo de este apartado es el uso de entornos de geometría dinámica para explorar invariantes, transformar figuras y relacionar representaciones geométricas y numéricas. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Juandi et al. (2021); Yohannes y Chen (2023); Suparman et al. (2024); Ng y Rosli (2023)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento

que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: la tesis incorporó GeoGebra como recurso posible, pero las estudiantes casi no recurrieron a él durante la resolución central y la autora recomendó una implementación más extensa. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que las revisiones sistemáticas y metaanálisis muestran efectos favorables de GeoGebra en aprendizaje matemático y visualización, pero también una concentración de estudios en niveles superiores. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Juandi et al. (2021); Yohannes y Chen (2023); Suparman et al. (2024); Ng y Rosli (2023)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

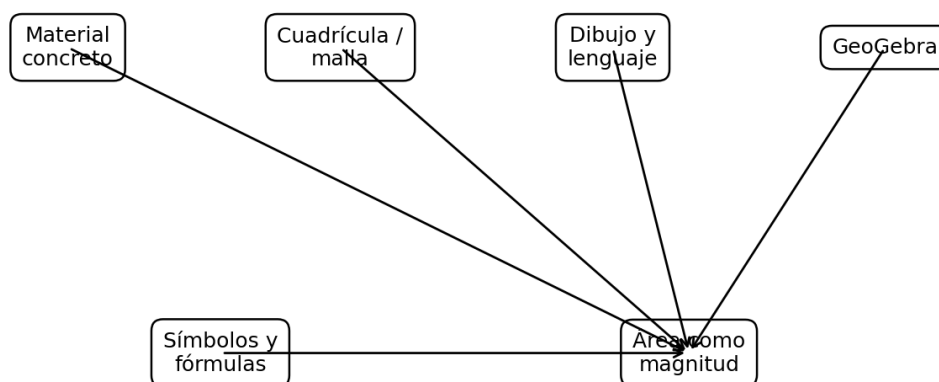
Un mecanismo particularmente relevante es que la tecnología aporta valor cuando hace visible una relación matemática que sería difícil de explorar con rapidez en papel, no cuando digitaliza una ficha sin alterar el razonamiento. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje

más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, arrastrar vértices conservando área, comparar unidades o registrar transformaciones son usos potencialmente coherentes con el enfoque de magnitud. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Figura 5. Ecología de recursos para aprender área

Ecología de recursos para aprender área



Elaboración propia a partir de los marcos teóricos y relaciones desarrollados en este libro.

La figura sintetiza relaciones que en el texto se analizan de manera separada. Su lectura debe hacerse de forma funcional: las flechas representan dependencias o transiciones didácticas, no una secuencia psicológica rígida. El valor del esquema consiste en ayudar a identificar qué componentes deben coordinarse cuando se diseña o interpreta una situación de aprendizaje del área.

Conviene introducir una cautela: la planificación debe anticipar carga cognitiva, dominio instrumental, disponibilidad de dispositivos y momentos de institucionalización. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Juandi et al. (2021); Yohannes y Chen (2023); Suparman et al. (2024); Ng y Rosli (2023)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica.

Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 16 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 16. Usos de GeoGebra alineados con el concepto de área como magnitud

Uso	Acción del estudiante	Relación matemática
Arrastre con restricciones	Modifica forma	Invariancia y dependencia entre dimensiones
Construcción de unidades	Recubre dinámicamente	Iteración y equivalencia
Descomposición móvil	Separa y reubica partes	Aditividad y conservación
Comparación de medidas	Cambia unidad o figura	Diferencia área-medida
Registro dinámico	Observa valores y cambios	Conecta geométrico y numérico

Elaboración propia a partir de Juandi et al. (2021), Yohannes y Chen (2023) y Suparman et al. (2024).

La lectura de la Tabla 16 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Juandi et al. (2021); Yohannes y Chen (2023); Suparman et al. (2024); Ng y Rosli (2023)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Juandi et al. (2021); Yohannes y Chen (2023); Suparman et al. (2024); Ng y Rosli (2023)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran

relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, el uso de entornos de geometría dinámica para explorar invariantes, transformar figuras y relacionar representaciones geométricas y numéricas también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Juandi et al. (2021); Yohannes y Chen (2023); Suparman et al. (2024); Ng y Rosli (2023)) proporciona antecedentes para

diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de arrastrar vértices conservando área, comparar unidades o registrar transformaciones son usos potencialmente coherentes con el enfoque de magnitud, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, la planificación debe anticipar carga cognitiva, dominio instrumental, disponibilidad de dispositivos y momentos de institucionalización plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Juandi et al. (2021); Yohannes y Chen (2023); Suparman et al. (2024); Ng y Rosli (2023)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta

coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

4.5 EVALUACIÓN FORMATIVA DE ESTRATEGIAS Y PROGRESIONES

El núcleo de este apartado es la evaluación como proceso para identificar niveles de razonamiento, estrategias, errores persistentes y condiciones de avance durante el aprendizaje. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Harris et al. (2022); Karaman (2021); Santos (2022)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: la tesis dispone de una riqueza cualitativa que no se reduce a respuestas correctas: diálogos, trazos, cambios de procedimiento y justificaciones. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que las evaluaciones basadas en progresiones permiten ubicar al estudiante entre formas informales y estructuras más sofisticadas de razonamiento. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el

estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Harris et al. (2022); Karaman (2021); Santos (2022)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que la retroalimentación es más potente cuando especifica la relación que debe reconsiderarse y ofrece una oportunidad inmediata de revisión. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, registrar estrategia, representación, unidad elegida, justificación y capacidad de transferencia produce evidencia más útil que una calificación binaria. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: las tareas de contraste antes y después de una secuencia deben ser suficientemente diferentes para evaluar transferencia, pero conservar el núcleo conceptual. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la

relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Harris et al. (2022); Karaman (2021); Santos (2022)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 17 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 17. Matriz de evaluación formativa del razonamiento de área

Dimensión	Evidencia inicial	Evidencia avanzada	Pregunta de retroalimentación
Atributo	Confunde borde e interior	Distingue magnitudes	¿Qué parte de la figura estás midiendo?
Unidad	No la explicita	La elige y justifica	¿Qué representa una unidad aquí?
Estructura	Cuenta uno a uno	Coordina filas/columnas	¿Cómo sabrías cuántas hay sin contarlas todas?
Transformación	Desconfía al cambiar forma	Reconoce conservación	¿Qué cambió y qué quedó igual?
Transferencia	Depende de cuadrícula	Resuelve con apoyos retirados	¿Cómo lo harías si no hubiera malla?

Elaboración propia a partir de Harris et al. (2022), Karaman (2021) y Santos (2022).

La lectura de la Tabla 17 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Harris et al. (2022); Karaman (2021); Santos (2022)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y

abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Harris et al. (2022); Karaman (2021); Santos (2022)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la

evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la evaluación como proceso para identificar niveles de razonamiento, estrategias, errores persistentes y condiciones de avance durante el aprendizaje también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Harris et al. (2022); Karaman (2021); Santos (2022)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de registrar estrategia, representación, unidad elegida, justificación y capacidad de transferencia produce evidencia más útil que una calificación binaria, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una

representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, las tareas de contraste antes y después de una secuencia deben ser suficientemente diferentes para evaluar transferencia, pero conservar el núcleo conceptual plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Harris et al. (2022); Karaman (2021); Santos (2022)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

El recorrido del capítulo permite integrar sus apartados como un argumento único: el aprendizaje del área no depende de una técnica aislada, sino de la construcción progresiva de invariantes, unidades y estrategias que se ponen a prueba en situaciones diversas. Los marcos teóricos, la evidencia reciente y el caso de origen convergen en la necesidad de diseñar experiencias que hagan visible el pensamiento y que permitan pasar de acciones concretas a representaciones y generalizaciones con significado. El capítulo siguiente retoma esta conclusión y la proyecta hacia un nuevo nivel de análisis, manteniendo como criterio la trazabilidad entre evidencia, interpretación y propuesta didáctica.

CAPÍTULO V

CASO DE ESTUDIO: CONSTRUCCIÓN DEL ÁREA COMO MAGNITUD EN SEXTO GRADO DE PRIMARIA

El quinto capítulo reconstruye el estudio original como caso científico, preservando el carácter cualitativo de sus datos, los participantes, los materiales y la secuencia de análisis. Los episodios de aula se presentan de manera condensada y editorialmente organizada para que el lector pueda seguir la evolución de las estrategias sin recorrer la estructura de una tesis. Los datos permiten observar intentos de medir perímetros, uso de ángulos, recubrimientos con cuadrícula, descomposición de polígonos, cambios de unidad, errores de validación y una transferencia parcial una semana después. Toda afirmación sobre el caso se atribuye a Castillo Pérez (2015).

5.1 CONTEXTO, PARTICIPANTES Y ARQUITECTURA METODOLÓGICA DEL CASO

El núcleo de este apartado es la reconstrucción del estudio original como caso didáctico cualitativo, preservando sus decisiones metodológicas y evitando presentarlo como experimento generalizable. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Castillo Pérez (2015); Artigue et al. (1995); Brousseau (2007)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: participaron cuatro estudiantes de once años del sexto grado de la Institución Educativa Estatal Virgo Potens de Lima, junto con el docente de Matemática, la investigadora-observadora y observadoras de apoyo. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que el estudio se organizó con elementos de Ingeniería Didáctica y analizó producciones escritas, observaciones y grabaciones de interacciones durante dos secuencias de actividades. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Castillo Pérez (2015); Artigue et al. (1995); Brousseau (2007)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que la selección fue intencional y el análisis se concentró en procesos y estrategias, por lo que los resultados describen posibilidades didácticas del caso y no estiman efectos poblacionales. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que

el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, la tesis presenta una discrepancia documental sobre el tamaño total de la sección —30 estudiantes en un pasaje y 32 en otro—, por lo que este libro no utiliza ese dato como base analítica. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: la trazabilidad exige distinguir siempre entre evidencia obtenida en 2015 y las interpretaciones contemporáneas incorporadas en esta obra. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Castillo Pérez (2015); Artigue et al. (1995); Brousseau (2007)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 18 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 18. Síntesis metodológica del estudio original

Elemento	Descripción verificada
Enfoque	Cualitativo
Marco metodológico	Ingeniería Didáctica
Participantes foco	Cuatro estudiantes de 11 años, sexto grado
Contexto	Institución Educativa Estatal Virgo Potens, Lima
Organización	Dos parejas: A1–A2 y B1–B2
Fuentes de evidencia	Fichas de aplicación, observaciones y grabaciones
Análisis	A priori, experimentación, a posteriori y validación

Fuente: Castillo Pérez (2015).

La lectura de la Tabla 18 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino

también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Castillo Pérez (2015); Artigue et al. (1995); Brousseau (2007)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Castillo Pérez (2015); Artigue et al. (1995); Brousseau (2007)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde

diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la reconstrucción del estudio original como caso didáctico cualitativo, preservando sus decisiones metodológicas y evitando

presentarlo como experimento generalizable también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Castillo Pérez (2015); Artigue et al. (1995); Brousseau (2007)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de la tesis presenta una discrepancia documental sobre el tamaño total de la sección —30 estudiantes en un pasaje y 32 en otro—, por lo que este libro no utiliza ese dato como base analítica, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, la trazabilidad exige distinguir siempre entre evidencia obtenida en 2015 y las interpretaciones contemporáneas incorporadas en esta obra plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones

y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Castillo Pérez (2015); Artigue et al. (1995); Brousseau (2007)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

5.2 DISEÑO DE LA SECUENCIA, MATERIALES Y VARIABLES DIDÁCTICAS

El núcleo de este apartado es la organización de dos actividades que modifican unidades, representaciones y formas con el propósito de hacer visible la invariancia del área. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Castillo Pérez (2015); Silva (2010); Brousseau (2007)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: la primera actividad trabajó con recortes, cuadrículas, unidades arbitrarias y polígonos de distinta complejidad; la segunda planteó situaciones de transferencia una semana después. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la

inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que el análisis a priori contempló posibles usos de conteo, fórmulas, recubrimiento, descomposición, composición y herramientas como GeoGebra. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Castillo Pérez (2015); Silva (2010); Brousseau (2007)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

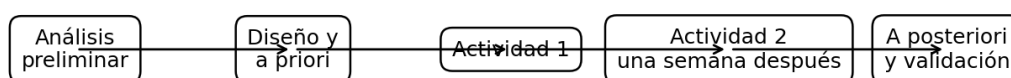
Un mecanismo particularmente relevante es que las variables incluyeron cuadrado, triángulo y rectángulos como unidades, figuras simples y complejas, papel en blanco, cuadrícula y malla triangular, y medidas enteras o fraccionarias. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, la combinación de variables buscó que una estrategia útil en una tarea dejara de ser suficiente en otra, generando necesidad de reorganización. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la

intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Figura 6. Flujo del caso de estudio

Flujo del caso de estudio



Elaboración propia a partir de los marcos teóricos y relaciones desarrollados en este libro.

La figura sintetiza relaciones que en el texto se analizan de manera separada. Su lectura debe hacerse de forma funcional: las flechas representan dependencias o transiciones didácticas, no una secuencia psicológica rígida. El valor del esquema consiste en ayudar a identificar qué componentes deben coordinarse cuando se diseña o interpreta una situación de aprendizaje del área.

Conviene introducir una cautela: el valor del diseño radica en su capacidad para revelar el significado que las estudiantes atribuían a unidad, área, superficie y medida. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Castillo Pérez (2015); Silva (2010); Brousseau (2007)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 19 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 19. Variables y valores de la primera actividad del estudio

Variable	Valores documentados
Unidad de medida	Cuadrado; triángulo; rectángulo equivalente a dos cuadrados; rectángulo equivalente a medio cuadrado
Tipo de figura	Simple; compleja
Herramienta/soporte	Blanco; cuadrícula; malla triangular
Tipo de malla	Cuadrículada; triangular
Medida respecto de cuadrícula	Entera; fraccionaria

Adaptado de Castillo Pérez (2015), a su vez basado en Silva (2010).

La lectura de la Tabla 19 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La Tabla 20 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 20. Organización temporal y función de las dos actividades

Actividad	Momento	Modalidad	Función analítica
Actividad 1	Sesión inicial	Trabajo en parejas	Explorar procedimientos, unidades y variables
Actividad 2	Una semana después	Resolución individual y socialización	Examinar estabilidad y transferencia
Actividad 2: resolución central	20 minutos de desarrollo dentro de una sesión de 40 minutos	Individual	Resolver nuevas situaciones
Socialización	Después de la resolución	Grupal	Comparar explicaciones y unidades

Elaboración propia a partir de Castillo Pérez (2015). La tesis registra 40 minutos para la segunda sesión y 20 minutos para su fase central de resolución.

La lectura de la Tabla 20 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas

operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Castillo Pérez (2015); Silva (2010); Brousseau (2007)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Castillo Pérez (2015); Silva (2010); Brousseau (2007)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la organización de dos actividades que modifican unidades, representaciones y formas con el propósito de hacer visible la invariancia del área también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce

parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Castillo Pérez (2015); Silva (2010); Brousseau (2007)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de la combinación de variables buscó que una estrategia útil en una tarea dejara de ser suficiente en otra, generando necesidad de reorganización, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, el valor del diseño radica en su capacidad para revelar el significado que las estudiantes atribuían a unidad, área, superficie y medida plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que

el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Castillo Pérez (2015); Silva (2010); Brousseau (2007)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

5.3 DEL PERÍMETRO Y LOS ÁNGULOS AL RECUBRIMIENTO DE SUPERFICIES

El núcleo de este apartado es los primeros intentos de las estudiantes y el desplazamiento desde procedimientos no pertinentes hacia estrategias de recubrimiento y conteo. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Castillo Pérez (2015); Kamii y Kysh (2006); Hong et al. (2018)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: al comienzo algunas midieron lados, intentaron sumar o multiplicar medidas e incluso solicitaron un transportador por asociación con la clase anterior de ángulos. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que la relectura de la consigna y el contacto con cuadrículas y unidades permitieron que ambos grupos construyeran procedimientos centrados en el interior de los polígonos. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Castillo Pérez (2015); Kamii y Kysh (2006); Hong et al. (2018)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que el episodio muestra que recordar una fórmula no equivale a identificar el atributo que debe medirse y que la proximidad temporal de un tema puede sesgar la selección de herramientas. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, la cuadrícula operó como puente entre percepción y cuantificación, aunque también originó errores cuando las figuras no estaban correctamente alineadas. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar

procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: la evolución de estrategia es más informativa que una respuesta aislada porque hace visible la reorganización del significado de medir área. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Castillo Pérez (2015); Kamii y Kysh (2006); Hong et al. (2018)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de

medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 21 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 21. Procedimientos iniciales observados y su interpretación

Procedimiento observado	Qué revela	Evolución posterior
Medir lados con regla	Asociación área–perímetro	Abandono al no recordar qué hacer con los lados
Solicitar transportador	Influencia de aprendizaje reciente sobre ángulos	Revisión de la consigna
Copiar en cuadrícula	Búsqueda de unidad de recubrimiento	Conteo de cuadrados
Superponer recorte en cuadrícula	Conexión región–unidad	Medición por recubrimiento
Completar figuras	Uso de conservación y composición	Resolución de triángulos y figuras complejas

Elaboración propia a partir de datos cualitativos de Castillo Pérez (2015).

La lectura de la Tabla 21 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más

generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Castillo Pérez (2015); Kamii y Kysh (2006); Hong et al. (2018)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Castillo Pérez (2015); Kamii y Kysh (2006); Hong et al. (2018)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran

relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, los primeros intentos de las estudiantes y el desplazamiento desde procedimientos no pertinentes hacia estrategias de recubrimiento y conteo también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Castillo Pérez (2015); Kamii y Kysh (2006); Hong et al. (2018)) proporciona antecedentes para

diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de la cuadrícula operó como puente entre percepción y cuantificación, aunque también originó errores cuando las figuras no estaban correctamente alineadas, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, la evolución de estrategia es más informativa que una respuesta aislada porque hace visible la reorganización del significado de medir área plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Castillo Pérez (2015); Kamii y Kysh (2006); Hong et al. (2018)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta

coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

5.4 COMPOSICIÓN, DESCOMPOSICIÓN, CAMBIO DE UNIDAD Y ERRORES PRODUCTIVOS

El núcleo de este apartado es la manera en que las participantes completaron triángulos, transformaron figuras complejas y coordinaron unidades diferentes para atribuir medidas de área. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Castillo Pérez (2015); Lehmann (2023); Clements et al. (2018)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: varios polígonos fueron medidos mediante completar rectángulos, contar cuadrados o recomponer partes; el polígono K, inicialmente percibido como difícil, pudo resolverse al reorganizar triángulos y cuadrados. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que el polígono D reveló un límite: completar una figura y dividir entre dos produjo 12,5 cuando la medida correcta era 7,5, porque la región original no era exactamente la mitad del cuadrado construido. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red

de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Castillo Pérez (2015); Lehmann (2023); Clements et al. (2018)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que el error muestra que una heurística útil debe validarse contra la estructura geométrica específica y no aplicarse por semejanza superficial. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, en otros episodios las estudiantes reconocieron que 192 cuadrados pequeños, 12 cuadrados grandes o 24 triángulos podían representar la medida de una misma área con unidades distintas. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: estos contrastes ofrecen evidencia local de avance conceptual y, al mismo tiempo, de conocimientos todavía frágiles. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por

sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Castillo Pérez (2015); Lehmann (2023); Clements et al. (2018)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 22 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 22. Medidas esperadas para los polígonos A–L bajo distintas unidades

Polígono	Grupo A	Grupo B	Cambio de unidad	Cuadrícula
A	7,5	3,75	15	120 cuadrados
B	15	7,5	30	240 cuadrados
C	9	4,5	18	144 cuadrados
D	7,5	3,75	15	120 cuadrados
E	12	6	24	192 cuadrados
F	12	6	24	192 cuadrados
G	15	7,5	30	240 cuadrados
H	8	4	16	128 cuadrados
I	7,5	3,75	15	120 cuadrados
J	8	4	16	128 cuadrados
K	12	6	24	192 cuadrados
L	16	8	32	256 cuadrados

Fuente: Castillo Pérez (2015). Estos valores pertenecen al análisis a priori y no constituyen frecuencias empíricas.

La lectura de la Tabla 22 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La Tabla 23 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 23. Episodios de error con valor diagnóstico

Episodio	Respuesta/acción	Referencia correcta	Lectura didáctica
Polígono I, grupo I	Completó rectángulo y obtuvo 10	7,5 unidades	La figura completada incorporó región adicional
Polígono D, grupo I	Dividió 25 entre 2 y obtuvo 12,5	7,5 unidades	No era exactamente la mitad del cuadrado completado
Polígono L	Aparece $17 \times 16 = 119$ en el diálogo	256 cuadraditos para 16×16	Error de representación y cálculo
Situación 2 de transferencia	Dificultad ante decimales y tiempo	Explicación por unidades distintas	Transferencia conceptual incompleta

Elaboración propia a partir de Castillo Pérez (2015).

La lectura de la Tabla 23 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de

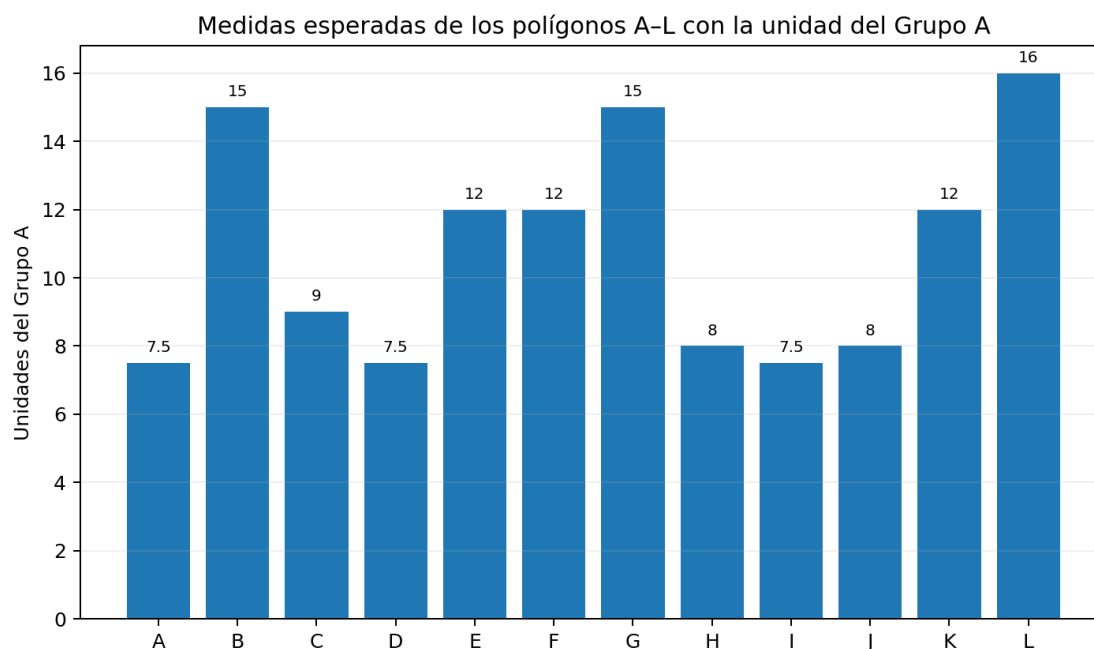
justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Castillo Pérez (2015); Lehmann (2023); Clements et al. (2018)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Castillo Pérez (2015); Lehmann (2023); Clements et al. (2018)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

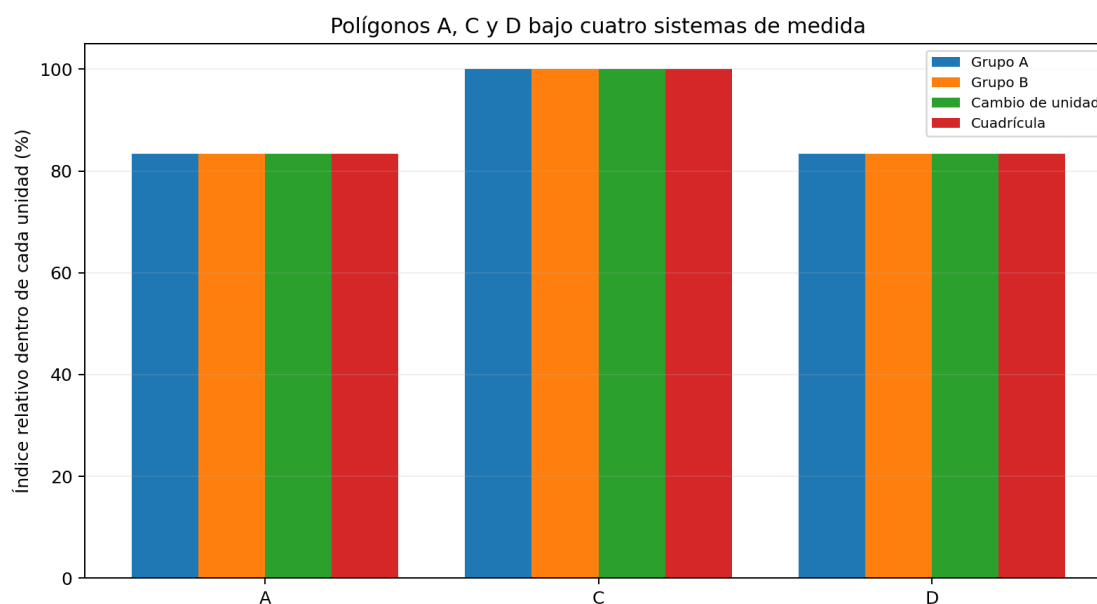
Gráfico 1. Medidas esperadas de los polígonos A–L con la unidad del Grupo A



Fuente: Castillo Pérez (2015). Valores del análisis a priori; no representan frecuencias observadas.

El Gráfico 1 no debe interpretarse como una distribución de desempeño. Su función es visualizar relaciones numéricas explicitadas en el análisis a priori de la tesis y reforzar la distinción entre magnitud y medida: el valor numérico depende de la unidad seleccionada, mientras que la región cuya área se mide permanece como referente geométrico.

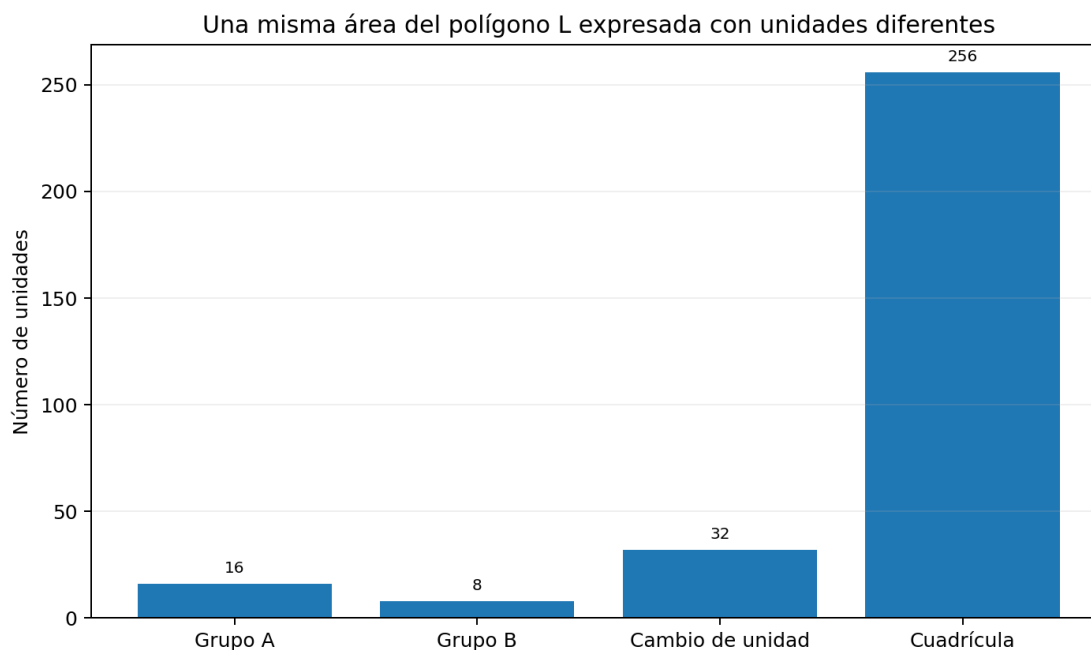
Gráfico 2. Polígonos A, C y D bajo cuatro sistemas de medida



Fuente: Castillo Pérez (2015). Escalas numéricas distintas porque las unidades también son distintas; se grafican para visualizar la dependencia de la medida respecto de la unidad. Para evitar una comparación engañosa entre unidades diferentes, cada serie se expresa como índice relativo respecto de su máximo interno.

El Gráfico 2 no debe interpretarse como una distribución de desempeño. Su función es visualizar relaciones numéricas explicitadas en el análisis a priori de la tesis y reforzar la distinción entre magnitud y medida: el valor numérico depende de la unidad seleccionada, mientras que la región cuya área se mide permanece como referente geométrico.

Gráfico 3. Una misma área del polígono L expresada con unidades diferentes



Fuente: Castillo Pérez (2015). El contraste ilustra que el número cambia con la unidad; la magnitud área del polígono permanece invariante.

El Gráfico 3 no debe interpretarse como una distribución de desempeño. Su función es visualizar relaciones numéricas explicitadas en el análisis a priori de la tesis y reforzar la distinción entre magnitud y medida: el valor numérico depende de la unidad seleccionada, mientras que la región cuya área se mide permanece como referente geométrico.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la manera en que las participantes completaron triángulos, transformaron figuras complejas y coordinaron unidades diferentes para atribuir medidas de área también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza

reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Castillo Pérez (2015); Lehmann (2023); Clements et al. (2018)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de en otros episodios las estudiantes reconocieron que 192 cuadrados pequeños, 12 cuadrados grandes o 24 triángulos podían representar la medida de una misma área con unidades distintas, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, estos contrastes ofrecen evidencia local de avance conceptual y, al mismo tiempo, de conocimientos todavía frágiles plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Castillo Pérez (2015); Lehmann (2023); Clements et al. (2018)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

5.5 TRANSFERENCIA UNA SEMANA DESPUÉS Y ALCANCE DE LOS RESULTADOS

El núcleo de este apartado es la segunda actividad como prueba de la estabilidad del aprendizaje ante problemas nuevos donde una misma superficie recibía distintas medidas según la unidad. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Castillo Pérez (2015); Idrus et al. (2022); Harris et al. (2022)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: tres estudiantes dibujaron representaciones para explicar la diferencia entre 16 y 8 unidades; A1 y B1 atribuyeron explícitamente la diferencia al uso de unidades distintas, mientras la segunda situación resultó más difícil. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que el análisis global de la tesis señala que el objetivo se cumplió de forma parcial porque no todas las participantes transfirieron de manera consistente los aprendizajes a la segunda secuencia. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Castillo Pérez (2015); Idrus et al. (2022); Harris et al. (2022)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que esta cautela es importante: los episodios exitosos no justifican afirmar una adquisición uniforme ni un efecto causal generalizable. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, la evidencia respalda mejor la afirmación de que determinadas tareas y mediaciones abrieron oportunidades para diferenciar área y medida y desarrollar estrategias más conceptuales. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: el caso sugiere ampliar duración, variedad de unidades, práctica de transferencia y uso intencional de tecnología en futuras implementaciones. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Castillo Pérez (2015); Idrus et al. (2022); Harris et al. (2022)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una

representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 24 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 24. Balance de hallazgos del caso

Aspecto	Evidencia de avance	Límite observado
Unidad de medida	Reconocimiento de medidas distintas para misma área	No todas las estudiantes lo sostienen en tareas nuevas
Cuadrícula	Recurso más utilizado para conteo	Puede inducir errores de alineación o conteo
Descomposición/composición	Uso espontáneo en varias figuras	Algunas transformaciones se aplican sin validar
Formulación	Explicaciones entre pares y al docente	Precisión conceptual desigual
Transferencia	A1 y B1 explican cambios de unidad	Segunda situación más difícil
Objetivo global	Contribución a la construcción del concepto	Cumplimiento parcial según análisis global de la tesis

Elaboración propia a partir de Castillo Pérez (2015).

La lectura de la Tabla 24 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Castillo Pérez (2015); Idrus et al. (2022); Harris et al. (2022)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Castillo Pérez (2015); Idrus et al. (2022); Harris et al. (2022)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la segunda actividad como prueba de la estabilidad del aprendizaje ante problemas nuevos donde una misma superficie recibía distintas medidas según la unidad también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Castillo Pérez (2015); Idrus et al. (2022); Harris et al. (2022)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de la evidencia respalda mejor la afirmación de que determinadas tareas y mediaciones abrieron oportunidades para diferenciar área y medida y desarrollar estrategias más conceptuales, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, el caso sugiere ampliar duración, variedad de unidades, práctica de transferencia y uso intencional de tecnología en futuras implementaciones plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Castillo Pérez (2015); Idrus et al. (2022); Harris et al. (2022)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

El recorrido del capítulo permite integrar sus apartados como un argumento único: el aprendizaje del área no depende de una técnica aislada, sino de la construcción progresiva de invariantes, unidades y estrategias que se ponen a prueba en situaciones diversas. Los marcos teóricos, la evidencia reciente y el caso de origen convergen en la necesidad de diseñar experiencias que hagan visible el pensamiento y que permitan pasar de acciones concretas a representaciones y generalizaciones con significado. El capítulo siguiente retoma esta conclusión y la proyecta hacia un nuevo nivel de análisis, manteniendo como criterio la trazabilidad entre evidencia, interpretación y propuesta didáctica.

CAPÍTULO VI

DISCUSIÓN, TRANSFERENCIA Y PROYECCIÓN: HACIA UNA DIDÁCTICA DEL ÁREA CENTRADA EN LA MAGNITUD

El sexto capítulo integra teoría y evidencia. Los hallazgos del caso se contrastan con revisiones y estudios posteriores, se propone una progresión ampliada para enseñar área como magnitud y se examinan las exigencias de conocimiento profesional docente, tecnología, equidad y evaluación. El cierre no pretende convertir un caso pequeño en una generalización, sino extraer principios de diseño que puedan someterse a nueva investigación. La obra culmina con un modelo integrador que articula objeto matemático, trayectoria cognitiva, medio, variables didácticas, mediación docente, recursos, evaluación y transferencia.

6.1 INTERPRETACIÓN AMPLIADA DE LOS HALLAZGOS DEL CASO

El núcleo de este apartado es una lectura contemporánea de los resultados que integre magnitud, estructuración espacial, trayectorias de aprendizaje y diseño de tareas. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Idrus et al. (2022); Clements et al. (2018); Harris et al. (2023)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: el caso muestra avances desde procedimientos basados en bordes o

recuerdos recientes hacia recubrimiento, conteo, descomposición y reconocimiento parcial de la invariancia. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que la literatura actual permite interpretar esos cambios como reorganizaciones en la coordinación de unidades y en la estructuración bidimensional más que como simple adquisición de una fórmula. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Idrus et al. (2022); Clements et al. (2018); Harris et al. (2023)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que la persistencia de errores indica que el conocimiento conceptual puede ser local y dependiente de representaciones antes de estabilizarse para situaciones nuevas. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, las interacciones entre pares parecen haber favorecido formulación y comparación de estrategias, aunque el diseño

no permite aislar su efecto. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: la discusión debe sostener simultáneamente el potencial de la secuencia y los límites de la evidencia producida por una muestra pequeña y cualitativa. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Idrus et al. (2022); Clements et al. (2018); Harris et al. (2023)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la

corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 25 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 25. Contraste entre el caso y la literatura contemporánea

Hallazgo del caso	Evidencia externa convergente	Implicación
Dependencia inicial de fórmulas/perímetro	Dificultades conceptuales persistentes	Priorizar unidad y estructura antes de fórmulas
Cuadrícula como apoyo dominante	Estructuración espacial favorece medición	Retirar gradualmente apoyos para verificar internalización
Cambio de unidad revela invariancia	Conocimiento conceptual mejora resolución	Usar unidades variadas y problemas explicativos
Descomposición ayuda en figuras complejas	Flexibilidad estratégica es central	Comparar múltiples descomposiciones
Transferencia parcial	Progresiones requieren evidencia longitudinal	Diseñar tareas distantes y seguimiento

Elaboración propia a partir de Castillo Pérez (2015), Idrus et al. (2022), Clements et al. (2018) y Lehmann (2023).

La lectura de la Tabla 25 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Idrus et al. (2022); Clements et al. (2018); Harris et al. (2023)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Idrus et al. (2022); Clements et al. (2018); Harris et al. (2023)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es

pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, una lectura contemporánea de los resultados que integre magnitud, estructuración espacial, trayectorias de aprendizaje y diseño de tareas también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la

medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Idrus et al. (2022); Clements et al. (2018); Harris et al. (2023)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de las interacciones entre pares parecen haber favorecido formulación y comparación de estrategias, aunque el diseño no permite aislar su efecto, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, la discusión debe sostener simultáneamente el potencial de la secuencia y los límites de la evidencia producida por una muestra pequeña y cualitativa plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y

el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Idrus et al. (2022); Clements et al. (2018); Harris et al. (2023)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

6.2 HACIA UNA PROGRESIÓN AMPLIADA PARA ENSEÑAR ÁREA COMO MAGNITUD

El núcleo de este apartado es una propuesta de progresión que conecte comparación cualitativa, conservación, recubrimiento, unidades compuestas, estructuración de arreglos, descomposición y formulación general. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Clements y Sarama (2014); Battista (2004); Harris et al. (2022)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: la tesis recomienda trabajar área como magnitud desde los primeros grados y variar unidades y posiciones antes de enseñar fórmulas establecidas. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para

evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que las trayectorias de aprendizaje respaldan una organización gradual en la que cada nivel introduce problemas que requieren coordinaciones más potentes. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Clements y Sarama (2014); Battista (2004); Harris et al. (2022)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que la progresión no debe entenderse como edad rígida, sino como secuencia de relaciones conceptuales que pueden diagnosticarse y retomarse. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, en grados intermedios conviene alternar unidades arbitrarias y convencionales, figuras regulares y no regulares, transformaciones y estimación. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver

preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: en grados superiores la fórmula puede integrarse con justificaciones, problemas inversos y figuras compuestas para preservar su significado. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Clements y Sarama (2014); Battista (2004); Harris et al. (2022)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de

medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 26 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 26. Progresión ampliada propuesta para el aprendizaje del área

Nivel	Relaciones centrales	Tareas indicativas	Criterio de avance
1. Comparación	Más/menos/igual área sin medir	Superposición y recorte	Justifica equivalencias cualitativas
2. Recubrimiento	Unidad bidimensional e iteración	Baldosas y cuadrículas	Recubre sin huecos ni solapes
3. Conservación	Forma cambia, área se conserva	Cortar y recomponer	Explica invariante
4. Estructuración	Filas, columnas y unidades compuestas	Mallas parciales	Anticipa unidades internas
5. Medición convencional	Unidades estándar y fracciones	cm ² , m ² , estimación	Relaciona número y unidad
6. Generalización	Fórmulas y figuras compuestas	Problemas inversos y múltiples estrategias	Justifica y transfiere

Propuesta de esta obra a partir de Clements y Sarama (2014), Battista (2004), Castillo Pérez (2015) e Idrus et al. (2022).

La lectura de la Tabla 26 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación,

partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Clements y Sarama (2014); Battista (2004); Harris et al. (2022)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Clements y Sarama (2014); Battista (2004); Harris et al. (2022)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe

confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, una propuesta de progresión que conecte comparación cualitativa, conservación, recubrimiento, unidades compuestas, estructuración de arreglos, descomposición y formulación general también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Clements y Sarama (2014); Battista (2004); Harris et al.

(2022)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de en grados intermedios conviene alternar unidades arbitrarias y convencionales, figuras regulares y no regulares, transformaciones y estimación, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, en grados superiores la fórmula puede integrarse con justificaciones, problemas inversos y figuras compuestas para preservar su significado plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Clements y Sarama (2014); Battista (2004); Harris et al. (2022)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta

coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

6.3 CONOCIMIENTO DOCENTE Y ORQUESTACIÓN DE DISCUSIONES MATEMÁTICAS

El núcleo de este apartado es el papel del docente para seleccionar tareas, interpretar estrategias, decidir cuándo intervenir y convertir producciones locales en conocimiento institucionalizado. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Brousseau (2007); Baturó y Nason (1996); Santos (2022)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: los episodios de la tesis muestran que la intervención docente puede reorientar sin entregar la respuesta, pero también que existe riesgo de sugerir procedimientos demasiado directamente. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que el conocimiento profesional necesario incluye comprender la matemática del área, anticipar errores, reconocer niveles de razonamiento y formular preguntas que sostengan la incertidumbre productiva. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y

operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Brousseau (2007); Baturo y Nason (1996); Santos (2022)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que la discusión colectiva debe comparar procedimientos por validez, eficiencia y generalidad, no por cercanía a una respuesta esperada del profesor. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, las evidencias de evaluación formativa pueden guiar la selección de la siguiente tarea y la retroalimentación individual o grupal. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: la formación docente debe incluir análisis de producciones reales y diseño de variaciones de tareas, no solo repertorios de actividades. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea

establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Brousseau (2007); Baturó y Nason (1996); Santos (2022)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 27 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 27. Conocimientos profesionales para enseñar área con enfoque conceptual

Dominio	Capacidad docente	Evidencia en la práctica
Matemático	Distinguir magnitud, medida, unidad y propiedades	Explica por qué funcionan procedimientos
Cognitivo	Reconocer niveles y errores típicos	Interpreta producción del estudiante
Didáctico	Diseñar variables y medios	Selecciona tareas con contraste productivo
Discursivo	Orquestar formulación y validación	Pide razones y conecta estrategias
Evaluativo	Usar evidencia formativa	Ajusta tarea y retroalimentación
Tecnológico	Integrar recursos con propósito	Elige cuándo software aporta a la relación

Elaboración propia a partir de Brousseau (2007), Baturó y Nason (1996), Santos (2022) y Yohannes y Chen (2023).

La lectura de la Tabla 27 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Brousseau (2007); Baturó y Nason (1996); Santos (2022)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y

abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Brousseau (2007); Baturo y Nason (1996); Santos (2022)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la

evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, el papel del docente para seleccionar tareas, interpretar estrategias, decidir cuándo intervenir y convertir producciones locales en conocimiento institucionalizado también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Brousseau (2007); Baturó y Nason (1996); Santos (2022)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de las evidencias de evaluación formativa pueden guiar la selección de la siguiente tarea y la retroalimentación individual o grupal, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La

comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, la formación docente debe incluir análisis de producciones reales y diseño de variaciones de tareas, no solo repertorios de actividades plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Brousseau (2007); Baturó y Nason (1996); Santos (2022)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

6.4 TECNOLOGÍA, EQUITAD Y DIVERSIDAD DE REPRESENTACIONES

El núcleo de este apartado es la integración de herramientas digitales y no digitales desde criterios de acceso, significado matemático, carga cognitiva y diversidad de estudiantes. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y

cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Yohannes y Chen (2023); Juandi et al. (2021); Suparman et al. (2024); Byrne et al. (2023)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: el uso limitado de GeoGebra en la tesis muestra que disponer de una herramienta no asegura que se convierta en medio matemático para resolver un problema. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que la investigación reciente sugiere efectos favorables de GeoGebra y del entrenamiento espacial, pero los beneficios dependen del diseño y no autorizan a sustituir experiencias concretas y discursivas. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Yohannes y Chen (2023); Juandi et al. (2021); Suparman et al. (2024); Byrne et al. (2023)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

Un mecanismo particularmente relevante es que una ecología de representaciones puede combinar recortes, cuadrículas, diagramas, gestos, lenguaje,

expresiones simbólicas y geometría dinámica. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, la accesibilidad exige ofrecer más de una vía para percibir, representar y justificar relaciones, evitando convertir la tecnología en una barrera adicional. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Conviene introducir una cautela: las decisiones de implementación deben considerar disponibilidad de dispositivos, tiempo de familiarización, apoyos docentes y transferencia a tareas sin software. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o

puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Yohannes y Chen (2023); Juandi et al. (2021); Suparman et al. (2024); Byrne et al. (2023)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 28 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 28. Ecología de representaciones para el concepto de área

Representación	Fortaleza	Limitación si se usa sola	Conexión necesaria
Material concreto	Acción y transformación	Puede quedar en lo perceptivo	Nombrar unidad y conservación
Cuadrícula	Estructura y conteo	Dependencia de marcas	Reconstruir sin cuadrícula
Diagrama	Síntesis espacial	Puede ocultar proceso	Explicar transformaciones
Lenguaje verbal	Argumentación	Ambigüedad terminológica	Anclar en acciones y propiedades
Símbolo/fórmula	Economía y generalidad	Aplicación mecánica	Derivar desde unidades
GeoGebra	Variación rápida e invariantes	Carga instrumental	Volver a explicación matemática

Elaboración propia a partir de Byrne et al. (2023), Juandi et al. (2021) y Harris et al. (2023).

La lectura de la Tabla 28 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Yohannes y Chen (2023); Juandi et al. (2021); Suparman et al. (2024); Byrne et al. (2023)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el

medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Yohannes y Chen (2023); Juandi et al. (2021); Suparman et al. (2024); Byrne et al. (2023)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué

enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, la integración de herramientas digitales y no digitales desde criterios de acceso, significado matemático, carga cognitiva y diversidad de estudiantes también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Yohannes y Chen (2023); Juandi et al. (2021); Suparman et al. (2024); Byrne et al. (2023)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de la accesibilidad exige ofrecer más de una vía para percibir, representar y justificar relaciones, evitando convertir la tecnología en una barrera adicional, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una

representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, las decisiones de implementación deben considerar disponibilidad de dispositivos, tiempo de familiarización, apoyos docentes y transferencia a tareas sin software plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Yohannes y Chen (2023); Juandi et al. (2021); Suparman et al. (2024); Byrne et al. (2023)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

6.5 LIMITACIONES, AGENDA DE INVESTIGACIÓN Y MODELO INTEGRADOR

El núcleo de este apartado es los límites del caso y las líneas necesarias para construir evidencia acumulativa sobre la enseñanza del área como magnitud. Este desplazamiento conceptual resulta decisivo porque el área no se aprende de manera sólida cuando se presenta únicamente como una operación aritmética asociada a ciertas

figuras. La matemática escolar necesita construir un puente entre experiencias de comparación y transformación, representaciones geométricas y cuantificación. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se entiende como una reorganización progresiva de relaciones: qué se mide, con qué unidad se compara, qué transformaciones conservan la magnitud y cómo se justifican los resultados. (Vargas Herrera et al. (2025); Harris et al. (2022); Atit et al. (2022)) ofrece un marco convergente para interpretar este tránsito y para diferenciar el conocimiento que permite ejecutar un cálculo del conocimiento que permite explicar por qué ese cálculo representa una medida de área.

La investigación que sirve de base a esta obra aporta un referente empírico especialmente útil: la muestra de cuatro estudiantes, la selección intencional y las diferencias de tiempo y documentación impiden generalizar tasas de éxito o atribuir causalidad a un componente específico. Este dato no se utiliza aquí como ilustración anecdótica, sino como evidencia situada de los problemas conceptuales que aparecen cuando el estudiante debe actuar sin una fórmula inmediatamente disponible. La riqueza del caso reside en que registra procedimientos, conversaciones y cambios de estrategia, por lo que permite reconstruir el razonamiento y no solo clasificar respuestas como correctas o incorrectas. La lectura editorial del estudio preserva esta evidencia, pero la inserta en un marco científico más amplio para evitar que la interpretación quede restringida a las condiciones particulares del aula observada (Castillo Pérez, 2015).

La literatura especializada amplía esta lectura al señalar que futuras investigaciones deberían incorporar diseños longitudinales, múltiples escuelas, análisis de fidelidad de implementación, medidas de transferencia y seguimiento de trayectorias individuales. En consecuencia, la comprensión del área puede describirse como una red de coordinaciones entre atributos geométricos, unidades, representaciones y operaciones. Cuando una de estas coordinaciones falta, el estudiante puede producir una respuesta numérica plausible sin controlar el significado de la magnitud. Por ello, la enseñanza conceptual no se opone a la eficiencia procedimental; su finalidad es que la eficiencia se apoye en estructuras que puedan recuperarse, explicarse y transferirse. (Vargas Herrera et al. (2025); Harris et al. (2022); Atit et al. (2022)) coincide en que la calidad del conocimiento se hace visible cuando el alumno puede cambiar de representación o de estrategia sin perder el control sobre la relación matemática central.

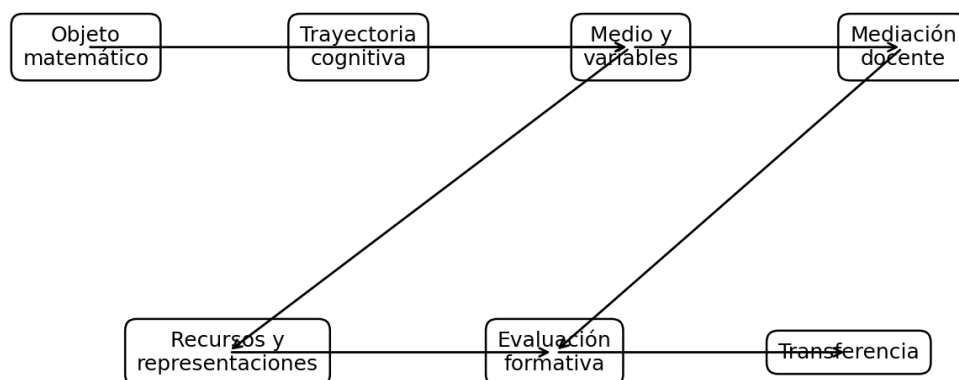
Un mecanismo particularmente relevante es que también es necesario estudiar cómo el conocimiento docente, el lenguaje, la cultura escolar, los recursos digitales y las

condiciones de equidad interactúan con el diseño de tareas. Esta idea permite transformar la tarea didáctica: ya no se trata solo de pedir un número, sino de diseñar condiciones para que determinadas relaciones sean necesarias. El estudiante debe decidir qué conservar, qué transformar y qué información resulta pertinente. Las tareas con variaciones controladas pueden provocar una ruptura de estrategias frágiles y favorecer otras más generales. Esa reorganización constituye una señal de aprendizaje más potente que la repetición exitosa de un mismo tipo de ejercicio, porque muestra que el conocimiento empieza a funcionar como herramienta para anticipar y justificar acciones matemáticas.

Desde el punto de vista del diseño de enseñanza, un modelo integrador debe coordinar objeto matemático, trayectoria cognitiva, medio didáctico, mediación docente, recursos y evaluación formativa. La consigna, los materiales y las representaciones deben sostener la actividad intelectual sin sustituirla. Una tarea demasiado guiada convierte el procedimiento en obediencia; una tarea demasiado abierta puede dispersar la atención y ocultar el objeto matemático. El equilibrio consiste en restringir suficientemente el medio para que las estrategias relevantes tengan consecuencias observables y, al mismo tiempo, conservar un espacio de decisión para el estudiante. En esta lógica, la intervención docente se orienta a pedir razones, comparar procedimientos y devolver preguntas que obliguen a revisar la coherencia de las soluciones, antes que a indicar el algoritmo esperado.

Figura 7. Modelo integrador para diseñar aprendizaje de área

Modelo integrador para diseñar aprendizaje de área



Elaboración propia a partir de los marcos teóricos y relaciones desarrollados en este libro.

La figura sintetiza relaciones que en el texto se analizan de manera separada. Su lectura debe hacerse de forma funcional: las flechas representan dependencias o transiciones didácticas, no una secuencia psicológica rígida. El valor del esquema consiste en ayudar a identificar qué componentes deben coordinarse cuando se diseña o interpreta una situación de aprendizaje del área.

Conviene introducir una cautela: la principal proyección del libro es convertir esa coordinación en un marco para diseñar, observar y mejorar experiencias de geometría de la medida. Esta precisión evita convertir recursos, teorías o procedimientos en recetas universales. Una cuadrícula, un manipulativo, una fórmula o un software no poseen eficacia didáctica por sí mismos; su función depende de la relación que la tarea establezca entre el recurso y el conocimiento. Incluso una estrategia matemáticamente válida puede convertirse en obstáculo si se aplica de manera rígida fuera de las condiciones que justifican su uso. El análisis didáctico debe, por tanto, atender a la estructura del problema, a los conocimientos previos y a las decisiones que el medio hace posibles o necesarias.

Una consecuencia para el aprendizaje es que las respuestas parciales deben leerse como configuraciones de conocimiento, no como simples fallas. Un estudiante puede reconocer una unidad de área y, sin embargo, no estructurarla en filas y columnas; puede descomponer una figura correctamente y recomponer mal sus áreas; o

puede calcular una medida con precisión sin distinguir la magnitud del número. Esta granularidad explica por qué una evaluación basada solo en aciertos pierde información crucial. Los niveles de razonamiento y las trayectorias de aprendizaje permiten describir qué relaciones están disponibles y cuáles requieren nuevas experiencias, especialmente cuando se combinan observaciones, producciones gráficas y explicaciones verbales (Vargas Herrera et al. (2025); Harris et al. (2022); Atit et al. (2022)).

El lenguaje cumple aquí una función epistemológica. Expresiones como superficie, área, medida, unidad, cuadrado, lado o perímetro no son intercambiables, aunque en la conversación cotidiana puedan mezclarse. La precisión verbal ayuda a estabilizar distinciones que después sostienen la simbolización. Sin embargo, la corrección terminológica no debe preceder mecánicamente a la comprensión: puede emerger de la necesidad de comunicar diferencias entre procedimientos y resultados. La institucionalización docente tiene sentido cuando nombra relaciones que los estudiantes ya han encontrado o que necesitan reorganizar, conectando producciones personales con una forma matemática compartida y culturalmente estable.

El contraste entre representaciones es otra herramienta de profundización. Una misma relación puede expresarse mediante recortes, una cuadrícula, una tabla de medidas, un diagrama, una expresión multiplicativa o una construcción dinámica. Cuando el estudiante puede explicar cómo se conserva el significado al pasar de una representación a otra, aumenta la probabilidad de que el conocimiento sea flexible. Cuando solo domina una representación, la aparente comprensión puede depender de señales perceptivas específicas. Por ello, resulta valioso retirar gradualmente apoyos visibles, introducir unidades no convencionales y plantear figuras cuya orientación o complejidad impida reconocer de inmediato una fórmula conocida.

La Tabla 29 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 29. Agenda de investigación derivada de la obra

Línea	Pregunta prioritaria	Diseño recomendado
Trayectorias longitudinales	¿Cómo se estabiliza la invariancia del área?	Seguimiento multigrado
Transferencia	¿Qué tan lejos se transfiere el conocimiento?	Tareas no isomorfas y seguimiento
Docencia	¿Qué intervenciones sostienen autonomía y validación?	Análisis de video y discurso
Tecnología	¿Qué usos dinámicos mejoran comprensión?	Comparación de diseños con y sin software
Equidad	¿Qué representaciones reducen barreras?	Muestras diversas y accesibilidad
Currículo	¿Cómo se alinean textos y trayectorias?	Análisis documental y de aula

Elaboración propia a partir de Vargas Herrera et al. (2025), Harris et al. (2022) y Yohannes y Chen (2023).

La lectura de la Tabla 29 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La Tabla 30 organiza los elementos centrales de esta discusión en un formato comparativo. Su función es hacer visibles relaciones que suelen aparecer dispersas en la literatura o en las producciones de aula y facilitar su uso en análisis didáctico y planificación.

Tabla 30. Modelo integrador para el diseño de situaciones de área

Componente	Pregunta de diseño	Evidencia de funcionamiento
Objeto matemático	¿Qué relación sobre el área debe emerger?	El estudiante la usa y explica
Trayectoria cognitiva	¿Qué coordinación antecede y cuál sigue?	La estrategia evoluciona
Medio	¿Qué retroacción ofrece la tarea?	El estudiante revisa decisiones
Variable didáctica	¿Qué cambio fuerza nueva estrategia?	Aparece reorganización
Mediación docente	¿Qué preguntas preservan autonomía?	Se amplían justificaciones
Recursos	¿Qué representación aporta?	Conecta acción, imagen y símbolo
Evaluación	¿Qué evidencia indica avance?	Transferencia a una tarea modificada

Modelo propuesto en esta obra a partir de la Teoría de Situaciones Didácticas, la Ingeniería Didáctica y la literatura reciente revisada.

La lectura de la Tabla 30 confirma que una misma tarea de área puede activar conocimientos distintos según la unidad, la representación, la figura y la exigencia de justificación. Por ello, el diseño no debería evaluar únicamente la exactitud final, sino

también la relación matemática que sostiene el procedimiento y su estabilidad ante una variación controlada.

La dimensión espacial merece atención explícita. La medición de área exige concebir unidades bidimensionales que recubren una región, coordinar partes y totalidad, y anticipar transformaciones que no alteran la cantidad de superficie. Estas operaciones implican visualización, pero no se reducen a una habilidad perceptiva aislada. La visualización se vuelve matemática cuando se articula con propiedades, relaciones de equivalencia y argumentos. La evidencia contemporánea sobre habilidades espaciales y rendimiento matemático permite entender por qué tareas de rotación, partición, estructuración y recomposición pueden contribuir a aprendizajes más generales, siempre que se integren al contenido y no se trabajen como ejercicios desconectados (Vargas Herrera et al. (2025); Harris et al. (2022); Atit et al. (2022)).

La evaluación formativa ofrece un marco operativo para convertir estas observaciones en decisiones de enseñanza. La pregunta clave no es solo si el estudiante llegó a un resultado, sino qué unidad imaginó, cómo organizó el recubrimiento, qué relación utilizó, cómo verificó su estrategia y si puede sostenerla en una tarea modificada. La retroalimentación útil se dirige a una relación matemática concreta y abre una nueva oportunidad de acción. De este modo, evaluar y enseñar dejan de ser momentos separados: la evidencia recogida durante la actividad permite ajustar el medio, seleccionar una variante de la tarea o decidir qué conocimiento necesita ser institucionalizado (Vargas Herrera et al. (2025); Harris et al. (2022); Atit et al. (2022)).

En términos curriculares, este enfoque exige continuidad. Las nociones de comparación, conservación, unidad e iteración deberían reaparecer con creciente complejidad a lo largo de la primaria, en lugar de quedar encapsuladas en una unidad temática breve. Cada retorno puede incorporar nuevas restricciones: unidades convencionales, medidas fraccionarias, figuras compuestas, datos incompletos, problemas inversos o necesidad de justificar generalizaciones. Una progresión de este tipo conecta la intuición geométrica con el razonamiento multiplicativo y prepara aprendizajes posteriores de proporcionalidad, semejanza, superficie y modelización.

La diversidad de estudiantes obliga a evitar una única vía de acceso. Algunos alumnos se benefician de manipular y superponer; otros de dibujar, verbalizar o usar una representación dinámica. Ofrecer múltiples representaciones no significa reducir la exigencia matemática, sino permitir que la relación central sea accesible desde

diferentes sistemas semióticos. El criterio de calidad es que todas las vías converjan en una explicación controlable: qué se conserva, qué cambia, por qué la unidad elegida es pertinente y cómo se puede verificar la medida. Este enfoque resulta compatible con una enseñanza inclusiva centrada en el razonamiento.

Para el profesorado, la implicación más exigente es anticipar estrategias sin fijarlas. Diseñar una buena situación supone imaginar procedimientos plausibles, errores productivos, valores de variables que provoquen cambios y preguntas que permitan sostener la autonomía. La planificación se convierte así en una hipótesis sobre el funcionamiento del conocimiento en un medio. Durante la clase, esa hipótesis debe confrontarse con las producciones reales y revisarse cuando las respuestas muestran relaciones distintas de las previstas. Esta lógica aproxima la práctica docente a una investigación sistemática de la enseñanza.

La expansión científica realizada en este libro también permite situar el caso en una escala adecuada. Las evidencias microdidácticas ofrecen profundidad interpretativa, mientras que revisiones sistemáticas y metaanálisis aportan panoramas más amplios sobre patrones, relaciones y efectos. Ninguno de estos niveles sustituye al otro. El caso explica cómo puede organizarse una estrategia dentro de una situación concreta; la evidencia acumulada ayuda a estimar si el problema observado es recurrente y qué enfoques han mostrado resultados consistentes. Su integración fortalece la discusión sin atribuir al pequeño estudio original alcances que no posee.

Como síntesis, el diseño de experiencias debe combinar comparación, medición, transformación y argumentación, con variaciones que permitan observar si el estudiante conserva el significado al cambiar de unidad, figura o representación. Esta formulación conecta el análisis conceptual con una decisión educativa verificable y prepara el paso hacia el siguiente problema del capítulo. La enseñanza del área como magnitud adquiere coherencia cuando las tareas, los recursos, las interacciones y la evaluación apuntan a las mismas relaciones matemáticas. El objetivo no es prolongar indefinidamente experiencias manipulativas ni retrasar el simbolismo, sino asegurar que la economía de la fórmula sea el punto de llegada de una estructura comprensible y que, una vez introducida, pueda volver a justificarse desde unidades, transformaciones y relaciones espaciales.

Desde una perspectiva epistemológica, los límites del caso y las líneas necesarias para construir evidencia acumulativa sobre la enseñanza del área como

magnitud también permite comprender que los conceptos escolares son el resultado de una organización progresiva de experiencias y relaciones. La historia de la medición muestra que cuantificar una superficie supone estabilizar unidades, operaciones de composición y criterios de equivalencia; la enseñanza reproduce parcialmente ese desafío a escala cognitiva. Por eso, saltar directamente a una notación eficiente puede ocultar los problemas que la propia matemática tuvo que resolver: qué cuenta como la misma cantidad de superficie, cómo se comparan regiones no superponibles y de qué manera una unidad puede iterarse de forma coherente. (Vargas Herrera et al. (2025); Harris et al. (2022); Atit et al. (2022)) proporciona antecedentes para diseñar tareas donde esas relaciones se conviertan en objeto de reflexión y no permanezcan como supuestos invisibles detrás de un algoritmo.

Una forma de operacionalizar este enfoque consiste en construir secuencias de tareas que mantengan estable el conocimiento central y modifiquen una condición a la vez. A partir de un modelo integrador debe coordinar objeto matemático, trayectoria cognitiva, medio didáctico, mediación docente, recursos y evaluación formativa, puede variarse la forma sin cambiar el área, cambiar la unidad manteniendo la región, retirar gradualmente la cuadrícula o pedir que una estrategia sea explicada con una representación distinta. La comparación entre soluciones se vuelve entonces parte del contenido: obliga a identificar qué información es matemática y cuál pertenece solo al dibujo o al material. Esta lógica favorece que el estudiante formule conjeturas, encuentre contraejemplos y desarrolle criterios para elegir procedimientos, en lugar de asociar cada apariencia visual con una regla aislada. La variación controlada es, además, un recurso potente para el docente porque hace observable la estabilidad o fragilidad de la comprensión.

En términos de investigación educativa, la principal proyección del libro es convertir esa coordinación en un marco para diseñar, observar y mejorar experiencias de geometría de la medida plantea una exigencia metodológica: separar cuidadosamente desempeño inmediato, comprensión conceptual y transferencia. Una secuencia puede mejorar la ejecución durante la sesión porque ofrece apoyos visibles, sin que ello implique que el estudiante haya internalizado la estructura necesaria para resolver una tarea distante. Por eso son relevantes las pruebas diferidas, las representaciones novedosas y la solicitud de justificaciones. La tesis de origen ya ofrece una señal en esa dirección al incluir una segunda actividad una semana después; la literatura

contemporánea sobre progresiones y evaluación formativa permite ampliar ese criterio y proponer seguimientos más extensos. De este modo, el diseño de enseñanza y el diseño de investigación convergen en una misma pregunta: qué evidencia permite afirmar que el conocimiento funciona más allá de la situación en la que fue construido (Vargas Herrera et al. (2025); Harris et al. (2022); Atit et al. (2022)).

En suma, este apartado refuerza una idea transversal del libro: comprender área supone coordinar relaciones geométricas, métricas y representacionales y poder justificar su funcionamiento cuando cambian las condiciones de la tarea. Esta coordinación prepara el terreno para el siguiente apartado, donde el análisis desplaza el énfasis hacia una dimensión complementaria del mismo problema.

El recorrido del capítulo permite integrar sus apartados como un argumento único: el aprendizaje del área no depende de una técnica aislada, sino de la construcción progresiva de invariantes, unidades y estrategias que se ponen a prueba en situaciones diversas. Los marcos teóricos, la evidencia reciente y el caso de origen convergen en la necesidad de diseñar experiencias que hagan visible el pensamiento y que permitan pasar de acciones concretas a representaciones y generalizaciones con significado. El capítulo siguiente retoma esta conclusión y la proyecta hacia un nuevo nivel de análisis, manteniendo como criterio la trazabilidad entre evidencia, interpretación y propuesta didáctica.

REFLEXIONES FINALES

La transformación de la investigación de Castillo Pérez (2015) en una obra científica de mayor alcance permite volver sobre una cuestión que atraviesa toda la educación matemática: la diferencia entre saber hacer un cálculo y comprender la estructura que lo justifica. En el caso del área, esa diferencia se vuelve especialmente visible porque una respuesta numérica puede obtenerse mediante una fórmula sin que el estudiante haya construido la unidad bidimensional, la conservación de la magnitud o la relación entre descomposición y aditividad. El libro ha mostrado que la comprensión conceptual no constituye un adorno teórico del procedimiento; es la condición que permite explicar, adaptar y transferir el procedimiento cuando cambian las figuras, las unidades o las representaciones.

El primer aporte de la obra es, por ello, devolver centralidad al área como magnitud. Distinguir superficie, área, medida y número permite organizar de manera coherente fenómenos que en el aula suelen aparecer desconectados. La invariancia del área frente al cambio de unidad, la equivalencia entre figuras de forma diferente y la conservación bajo transformaciones dejan de ser curiosidades para convertirse en principios estructurantes. Desde esta perspectiva, recubrir, comparar, cortar, recomponer y estructurar filas y columnas son actividades matemáticas fundamentales porque hacen visible aquello que la fórmula sintetizará posteriormente.

El segundo aporte es didáctico. La Teoría de Situaciones Didácticas y la Ingeniería Didáctica permiten comprender que el aprendizaje no depende únicamente de una explicación correcta, sino de las condiciones que obligan al estudiante a utilizar y revisar determinado conocimiento. El medio, las variables, el contrato didáctico y las fases de acción, formulación, validación e institucionalización ofrecen un lenguaje para analizar por qué una consigna produce ciertas estrategias y cómo una intervención puede sostener o anular la autonomía. La enseñanza se vuelve así un problema de diseño y regulación de condiciones, no una simple transmisión de reglas.

El caso original aporta evidencia concreta a esta discusión. Las participantes comenzaron recurriendo a lados, perímetros, ángulos y fórmulas recordadas, y progresivamente utilizaron cuadrículas, unidades arbitrarias, completar figuras, descomponer y recomponer. Estos cambios no fueron uniformes ni definitivos. Los errores con los polígonos I y D, las dificultades de cálculo y la transferencia parcial una semana después muestran que el conocimiento conceptual puede construirse localmente y seguir siendo frágil. Esa fragilidad no invalida la secuencia; delimita con mayor precisión lo que una experiencia breve puede producir y lo que exige continuidad curricular.

La literatura incorporada amplía esta interpretación. Las revisiones sobre medición de área resaltan la importancia del conocimiento conceptual; los estudios sobre estructuración espacial muestran que la organización de unidades en arreglos bidimensionales es un componente decisivo; los trabajos sobre figuras compuestas subrayan la flexibilidad de descomposición y recomposición; y los metaanálisis sobre habilidades espaciales confirman su relación con el rendimiento matemático (Atit et al., 2022; Hawes et al., 2022; Idrus et al., 2022; Lehmann, 2023). Estos resultados convergen con la intuición central de la tesis, aunque la expresan desde marcos y muestras diferentes.

Los recursos deben interpretarse dentro de este sistema. La cuadrícula fue el soporte dominante en el estudio original y mostró un gran poder para hacer visible la cobertura, pero también evidenció errores cuando se utilizó sin controlar la posición o las regiones añadidas. Los manipulativos ayudan cuando representan relaciones relevantes y se conectan con formas más abstractas. GeoGebra y otros entornos dinámicos pueden acelerar la exploración de invariantes y transformaciones, pero la evidencia revisada recuerda que el software no garantiza aprendizaje por sí mismo (Juandi et al., 2021; Yohannes & Chen, 2023). El criterio decisivo es siempre qué relación matemática hace necesaria o visible el recurso.

En el plano curricular, la consecuencia es una progresión más larga y deliberada de lo que suele sugerir la presencia temprana de fórmulas. Las experiencias con comparación, unidad, recubrimiento y conservación deben comenzar antes de la formalización y reaparecer después de ella bajo condiciones más exigentes. Una fórmula comprendida puede coexistir con estimación, problemas inversos, unidades fraccionarias, figuras compuestas y transformaciones; una fórmula memorizada suele

quedar atada a configuraciones familiares. La progresión propuesta en el capítulo VI intenta conservar esta continuidad y ofrecer puntos de diagnóstico para la evaluación formativa.

Las limitaciones de la investigación de origen son igualmente instructivas. Cuatro participantes, selección intencional, una duración breve y una transferencia evaluada mediante un número reducido de situaciones impiden generalizar resultados o atribuir causalidad. La discrepancia interna entre 30 y 32 estudiantes al describir el grupo total aconseja no utilizar esa cifra como dato analítico. Estas restricciones no deben ocultarse: son parte de la trazabilidad científica. El valor del caso es explicativo y generativo, pues permite formular hipótesis sobre procesos y diseñar investigaciones posteriores más amplias.

Entre los desafíos futuros destacan los estudios longitudinales sobre construcción de la unidad de área, investigaciones multisitio sobre transferencia, análisis del discurso docente durante la validación, comparación de secuencias con diferentes variables, y trabajos que integren tecnología con criterios de accesibilidad. También se requiere profundizar en el conocimiento matemático para la enseñanza del área y en las decisiones que permiten a un docente reconocer cuándo un error expresa una concepción productiva que puede reorganizarse y cuándo revela una relación ausente que necesita nuevas experiencias.

La perspectiva general que emerge puede resumirse en una relación de siete componentes: objeto matemático, trayectoria cognitiva, medio, variables didácticas, mediación docente, recursos y evaluación. Ningún componente funciona de forma aislada. Una tarea conceptual requiere un objeto bien definido; una trayectoria orienta la selección de variables; el medio produce retroacciones; la mediación ayuda a transformar acción en argumento; los recursos articulan representaciones; y la evaluación permite decidir si el conocimiento se conserva cuando cambia la situación. Esta arquitectura ofrece una base para diseñar nuevas secuencias y para interpretar sus resultados con mayor precisión.

La obra cierra, entonces, con una posición educativa clara: enseñar área como magnitud significa enseñar a pensar matemáticamente sobre el espacio ocupado, las unidades que permiten cuantificarlo y las transformaciones que preservan sus propiedades. La fórmula no desaparece; recupera su lugar como expresión condensada de relaciones construidas. Cuando el estudiante puede volver desde el símbolo hacia la

unidad, la estructura y la transformación, el cálculo deja de ser un procedimiento aislado y se convierte en conocimiento matemático transferible.

BIBLIOGRAFÍA

- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (Eds.). (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Atit, K., Power, J. R., Pigott, T., Lee, J., Geer, E. A., Uttal, D. H., Ganley, C. M., & Sorby, S. A. (2022). Examining the relations between spatial skills and mathematical performance: A meta-analysis. *Psychonomic Bulletin & Review*, 29(3), 699–720. <https://doi.org/10.3758/s13423-021-02012-w>
- Baltar, P. (1996). À propos de l'apprentissage du concept d'aire. *Petit x*, 43, 43–68.
- Baltar, P. (1999). Une étude de situations et d'invariants: Outil pour l'analyse de la construction du concept d'aire au collège. *Petit x*, 49, 45–78.
- Battista, M. T. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 185–204. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_6
- Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31(3), 235–268. <https://doi.org/10.1007/BF00376322>
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33–115.
- Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas (D. Fregona, Trad.). Libros del Zorzal.
- Byrne, E. M., Jensen, H., Thomsen, B. S., & Ramchandani, P. G. (2023). Educational interventions involving physical manipulatives for improving children's learning and development: A scoping review. *Review of Education*, 11(2), e3400. <https://doi.org/10.1002/rev3.3400>
- Castillo Pérez, V. M. (2015). Secuencia didáctica para contribuir en la construcción del concepto de área como magnitud con estudiantes de educación primaria [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Escuela de Posgrado].

- Repositorio Institucional de la Pontificia Universidad Católica del Perú.
<http://hdl.handle.net/20.500.12404/6751>
- Chamorro, M. del C., Belmonte, J. M., & Llinares, S. (2010). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Pearson Educación.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (2nd ed.). Routledge.
<https://doi.org/10.4324/9780203520574>
- Clements, D. H., Sarama, J., Van Dine, D. W., Barrett, J. E., Cullen, C. J., Hudyma, A., Dolgin, R., Cullen, A. L., & Eames, C. L. (2018). Evaluation of three interventions teaching area measurement as spatial structuring to young children. *The Journal of Mathematical Behavior*, 50, 23–41.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.12.004>
- Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas: Estudio de su comprensión por los estudiantes de primaria a la universidad* [Tesis doctoral, Universitat de València].
- Del Olmo, M. A., Moreno, M. F., & Gil, F. (1993). *Superficie y volumen: ¿Algo más que el trabajo con fórmulas? Síntesis*.
- Douady, R., & Perrin-Glorian, M.-J. (1983). Mesures des longueurs et des aires. *Cahier de didactique des mathématiques*, 48. IREM Université Paris 7.
- Douady, R., & Perrin-Glorian, M.-J. (1987). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Cahier de didactique des mathématiques*, 37. IREM Université Paris 7.
- Facco, S. R. (2003). *Conceito de área: Uma proposta de ensino-aprendizagem* [Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo].
- Foulkes, M., Sella, F., Wege, T. E., & Gilmore, C. (2023). The effects of concreteness on mathematical manipulative choice. *Mind, Brain, and Education*, 17(3), 185–196. <https://doi.org/10.1111/mbe.12374>
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. D. Reidel.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada.

- Harris, D., Logan, T., & Lowrie, T. (2023). Spatial visualization and measurement of area: A case study in spatialized mathematics instruction. *The Journal of Mathematical Behavior*, 70, 101038.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101038>
- Harris, L. R., Adie, L., & Wyatt-Smith, C. (2022). Learning progression-based assessments: A systematic review of student and teacher uses. *Review of Educational Research*, 92(6), 996–1040.
<https://doi.org/10.3102/00346543221081552>
- Hawes, Z. C. K., Gilligan-Lee, K. A., & Mix, K. S. (2022). Effects of spatial training on mathematics performance: A meta-analysis. *Developmental Psychology*, 58(1), 112–137. <https://doi.org/10.1037/dev0001281>
- Hong, D. S., Choi, K. M., Runnalls, C., & Hwang, J. (2018). Do textbooks address known learning challenges in area measurement? A comparative analysis. *Mathematics Education Research Journal*, 30(3), 325–354.
<https://doi.org/10.1007/s13394-018-0238-6>
- Hong, D. S., Choi, K. M., Runnalls, C., & Hwang, J. (2019). How well aligned are common core textbooks to students' development in area measurement? *School Science and Mathematics*, 119(5), 240–254. <https://doi.org/10.1111/ssm.12336>
- Idrus, H., Abdul Rahim, S. S., & Zulnaidi, H. (2022). Conceptual knowledge in area measurement for primary school students: A systematic review. *STEM Education*, 2(1), 47–58. <https://doi.org/10.3934/steme.2022003>
- Iranzo, N., & Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), 433–446.
- Juandi, D., Kusumah, Y. S., Tamur, M., Perbowo, K. S., & Wijaya, T. T. (2021). A meta-analysis of GeoGebra software decade of assisted mathematics learning: What to learn and where to go? *Heliyon*, 7(5), e06953.
<https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2021.e06953>
- Kamii, C., & Kysh, J. (2006). The difficulty of “length $\times$ width”: Is a square the unit of measurement? *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(2), 105–115.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.02.001>

- Karaman, P. (2021). The effect of formative assessment practices on student learning: A meta-analysis study. *International Journal of Assessment Tools in Education*, 8(4), 801–817. <https://doi.org/10.21449/ijate.870300>
- King, S., Rojo, M., & Bryant, D. P. (2023). Demystifying area and perimeter: A practitioner's guide to strategies that work. *Intervention in School and Clinic*, 58(4), 241–248. <https://doi.org/10.1177/10534512221093780>
- Lehmann, T. H. (2023). Learning to measure the area of composite shapes. *Educational Studies in Mathematics*, 112, 531–565. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10191-z>
- Ministerio de Educación del Perú. (2016a). Currículo nacional de la educación básica. MINEDU. <https://hdl.handle.net/20.500.12799/4551>
- Ministerio de Educación del Perú, Dirección General de Educación Básica Regular. (2016b). Programa curricular de Educación Primaria. MINEDU. <https://hdl.handle.net/20.500.12799/4549>
- Ng, A. P., & Rosli, R. (2023). Systematic literature review: The use of GeoGebra software in geometry learning. *Jurnal Pendidikan Sains Dan Matematik Malaysia*, 13(1), 64–78. <https://doi.org/10.37134/jpsmm.vol13.1.6.2023>
- OECD. (2023). PISA 2022 results (Volume I): The state of learning and equity in education. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- Perrin-Glorian, M.-J. (2009). Utilidad de la teoría de las situaciones didácticas para incluir los fenómenos vinculados a la enseñanza de las matemáticas en las clases normales. *Revista Internacional Magisterio Educación y Pedagogía*, 7(39), 10–16.
- Santos, L. (2022). Feedback as a powerful tool for mathematical learning: A meta-analysis of Portuguese studies. *Revemop*, 4, e202210. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202210>
- Silva, G. (2010). Um estudo diagnóstico sobre o cálculo de áreas de figuras planas em uma malha quadriculada: Influência de algumas variáveis [Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Pernambuco].
- Suparman, Marasabessy, R., & Helsa, Y. (2024). Fostering spatial visualization in GeoGebra-assisted geometry lesson: A systematic review and meta-analysis.

- Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 20(9), em2509. <https://doi.org/10.29333/ejmste/15170>
- Trimurtini, Waluya, S. B., Sukestiyarno, Y. L., & Kharisudin, I. (2022). A systematic review on geometric thinking: A review research between 2017–2021. *European Journal of Educational Research*, 11(3), 1535–1552. <https://doi.org/10.12973/eu-er.11.3.1535>
- Vargas Herrera, J. P., Vanegas, Y., & Giménez, J. (2025). Two decades of research on geometry education in Ibero-America: An exploratory systematic review. *Uniciencia*, 39(1). <https://doi.org/10.15359/ru.39-1.30>
- Yohannes, A., & Chen, H.-L. (2023). GeoGebra in mathematics education: A systematic review of journal articles published from 2010 to 2020. *Interactive Learning Environments*, 31(9), 5682–5697. <https://doi.org/10.1080/10494820.2021.2016861>
- Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 224–239. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.003>